39
4103

39
4703

<36602714210011

<36602714210011

Bayer. S

I

Theorie der Kegelschnitte

bearbeitet

von

C. G. Zimmermann,

Dr. der Philos., Mitglied der wissenschaftlichen Direktion und Lehrer der reinen Mathematik und praktischen Geometrie an der Königl. vereinigten Artillerie- und Ingenieur-Schule, Lehrer an der Königl. Bau-Akademie und Professor am Fr.-Gymn.

Mit einer Kupfertafel.

Berlin,

gedruckt in der J. F. Ungerschen Buchdruckerei.

1818.

(Preis 20 Gr.)

Q. n. 8252

109

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Bayerische Staatsbibliothek München

I. Abschnitt.

Von den Kegelschnitten.

a) Einleitende Begriffe.

§. 1. Jede krumme Linie kann man sich, wie sie auch sonst beschaffen seyn mag, mit zwei unbegrenzten, einander unter einem rechten Winkel durchschneidenden, geraden Linien auf einer Ebene in einer solchen Verbindung verzeichnet denken, daß jeder Punkt der krummen Linie, auf die geraden bezogen, durch sie bestimmt und vollkommen genau angegeben werden kann. Man hat hierbei die Absicht, einen Ausdruck zu suchen, welcher den Gang der krummen Linien, in ihrem ganzen Laufe vorstellt; oder man hat die Absicht, aus einem solchen Ausdrucke die Natur und Eigenschaften der krummen Linie zu entwickeln. Ein solcher Ausdruck (Funkzion) ist eine Verbindung mehrerer bekannten, mit zwei veränderlichen Größen, so daß die eine durch die andere bestimmt wird. Diese gegenseitige Bestimmung der veränderlichen Größen geschiehet durch eine Gleichung. Die

einfachsten aller Gleichungen mit zwei veränderlichen Größen sind die Gleichungen des ersten Grades, welche auch die einfachsten, d. h. die geraden Linien ausdrucken. Gleichungen des zweiten, dritten Grades mit zwei veränderlichen Größen, gehören für Linien der zweiten, dritten ꝛc. Ordnung und drucken die Natur der krummen Linien aus. Um sich nun vorläufig von diesem Verfahren eine deutliche Vorstellung zu machen, nach welchem zu einer gegebenen Gleichung, die krummen Linien nach ihrer Gestalt und Ausdehnung verzeichnet werden, oder nach welchem aus ihrer Figur die Gleichung abgeleitet werden könne, mögen daher (Fig. 1.) KL und RS die beiden in A sich durchschneidenden Linien und mBMN mag ein Theil einer krummen Linie seyn. Alsdann kann man aus jedem Punkte, wie M, m ꝛc. zwei gerade Linien, aus M die MP und MD parallel mit RS und KL und aus m, mp und mC auch parallel mit RS und KL ziehen. Diese Linien aber schneiden von den erstern KL und RS allemahl bestimmte Stücke ab. Nimmt man nun A für den Punkt an, von welchem man die auf beiden Linien abgeschnittenen Stücke mißt, so nennt man jede der Linien wie AP, Ap ꝛc. eine Absciſſe; jede gerade durch den Endpunkt der Absciſſen mit RS parallellaufende Linie wie PM, pm eine Ordinate. Die Linie,

worauf die Abscissen liegen, heißt die Abscissenlinie und A der Anfangspunkt der Abscissen.

1. Zus. Da PM ≠ RS und DM ≠ AP, so ist AM allemahl ein Plgr., in dessen Winkelpunkt M ein Punkt der krummen Linie liegt. In jedem Plgr. sind die gegenüberliegenden Seiten einander gleich. Daher kann man PM mit AD und AP mit DM verwechseln. Der Winkel aber, welchen die Ordinate mit der Abscisse einschließt, heißt der Ordinatenwinkel.

2. Zus. Jede Abscisse mit der dazu gehörigen Ordinate gibt einen Punkt in der krummen Linie an. Um nun diese Linien mit einander zu vergleichen und durch Zahlen auszudrucken, kann man sich eine Linie e von bestimmter Länge zum Maße annehmen, sie in sehr kleine gleiche Theile etwa in 1000 eintheilen und jede Abscisse und Ordinate vermittelst dieser Theile in Zahlen ausdrucken. Ist z. B. AP $= \frac{1}{2}e$, so enthält AP 500 solcher Theile als 1000 in c enthalten sind, ist die Ordinate PM $= \frac{5}{4}e$, so wird sie eben so durch die Zahl 1250 ausgedruckt.

b) Von der geraden Linie.

§. 2. Um nun diese Methode näher kennen zu lernen, wollen wir die Untersuchung mit der geraden Linie anfangen. Es ist schon oben bemerkt worden, daß jede

Gleichung einer Linie die Relation bezeichnet, welche zwischen den Coordinaten x und y und einem jeden Punkte der krummen Linie Statt findet. Diese Relation ist von der Beschaffenheit, daß jeder nach Willkür angenommene Werth von x, wenigstens einen Werth für y gibt. Da die Gleichung unbestimmt ist, so erhält man vermittelst ihrer eine unzählige Menge von Punkten und das System aller dieser Punkte, stellt die krumme Linie dar. Diese Methode kann man nun anwenden, um vermittelst einer Gleichung die Gestalt einer jeden Linie, ihre besondern Eigenschaften, ihre merkwürdigsten Punkte ꝛc. aufzusuchen. Wir wollen demnach mit folgender Aufgabe den Anfang machen.

§. 3. Aufg. Die Gleichung für eine gerade Linie (Fig. 2.) zu finden, welche gegen die Abscissenlinie unter einem gegebenen Winkel α geneigt und deren Abstand des Durchschnittspunktes A vom Anfangspunkt B der Abscissen, bekannt ist.

Aufl. Es sey AM die gerade Linie, welche von der Abscissenlinie AP unter dem Winkel PAM $= \alpha$ geschnitten wird, B der Anfangspunkt der Abscissen AB $= c$, M irgend ein Punkt der geraden Linie, wozu PM $= y$ und BP $= x$ als Coordinaten gehören, so ist PM $=$ AP $\tan g \alpha$; oder

$y = (c + x) \tan \alpha = c . \tan \alpha + x \tan \alpha$. Schreibt man nun zur Abkürzung b für die beständige Größe $c . \tan \alpha$ und a für $\tan \alpha$, so ist $y = ax + b$ die verlangte Gleichung, welche hier das System von Coordinaten, für alle Punkte, d. h. den Gang der Linien AM angibt.

§. 4. Aufg. Die Gleichung einer geraden durch zwei gegebene Punkte gehenden Linie zu finden.

Aufl. Unter einem gegebenen Punkte versteht man hier allemahl die zu denselben gehörigen Coordinaten. Sind nun die Abscissen der beiden Punkte durch α und α', die Ordinaten durch ω und ω' bezeichnet, so erhält man aus $y = ax + b$ nach den angegebenen Bedingungen, die beiden Gleichungen, 1) $\omega = a\alpha + b$ und 2) $\omega' = a\alpha' + b$. Aus diesen werden die Werthe a und b abgeleitet. Es ist aber

$\omega' - \omega = a(\alpha' - \alpha)$, folglich $a = \dfrac{\omega' - \omega}{\alpha' - \alpha}$; und b

$= \omega' - a\alpha' = \omega' - \alpha' \left(\dfrac{\omega' - \omega}{\alpha' - \alpha}\right) = \dfrac{\omega\alpha' - \omega\alpha}{\alpha' - \alpha}$. Also

ist die Gleichung für die gerade Linie $y = x \left(\dfrac{\omega' - \omega}{\alpha' - \alpha}\right)$

$+ \dfrac{\omega\alpha' - \omega'\alpha}{\alpha' - \alpha}$.

Man erhält den Werth von y in einer einfa-

chern Gestalt, wenn man eine der beiden obigen Gleichungen, wie $\omega = a\alpha + b$ von $y = ax + b$ abzieht. In diesem Falle findet man $y - \omega = a(x - \alpha) = \frac{\omega' - \omega}{\alpha' - \alpha}(x - \alpha)$, indem man für a den obigen Werth schreibt.

In Absicht der Gleichung $y - \omega = a(x - \alpha)$ wird man leicht bemerken, daß alle zu ihr gehörige, durch den gegebenen Punkt gehende gerade Linien, wegen des beliebigen Winkels a, eine verschiedene Lage gegen die Abscissenlinie haben.

Will man den Abstand δ (Fig. 3.) zweier gegebenen Punkte oder den zwischen diesen Punkten enthaltenen Theil der geraden Linie bestimmen, so darf man sich nur erinnern, daß derselbe die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks vorstellt. Es ist aber $\delta^2 = (\omega' - \omega)^2 + (\alpha' - \alpha)^2$, folglich $\delta = \sqrt{[(\alpha' - \alpha)^2 + (\omega' - \omega)]^2}$ und der Abstand des ersten Punktes M vom Anfangspunkte A, $= \sqrt{(\alpha^2 + \omega^2)}$.

§. 5. Auf. Den Winkel zu finden, welchen zwei in einerlei Ebene liegende, durch ihre Gleichungen gegebene, gerade Linien, mit einander einschließen.

Aufl. Die beiden Gleichungen mögen $y = ax + b$ und $y = a'x + b'$ seyn; der Winkel der ersten geraden Linie, mit der Abscissenlinie sey $=$ A, der andern, $=$ B, ihre Differenz, $=$ D, so ist $\tang(A - B) = \tang D$

$= \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$ (E. Tr. §. 14.) Setzt man nun $\tan A = a$ und $\tan B = a'$, so erhält man $\tan D = \frac{a - a'}{1 + aa'}$.

1. Zus. Ist nun $1 + aa' = 0$, oder $aa' = -1$, so ist $\tan D = \infty$, folglich $D = A - B = R$ und $a' = -\frac{1}{a}$, eine Größe, welche die Bedingung angibt, unter welcher die gegebene mit der gesuchten Linie einen rechten Winkel einschließt, und die dazu gehörige Gleichung ist $y - \omega = -\frac{1}{a}(x - \alpha)$.

2. Zus. Ist aber $a - a' = 0$, folglich $a = a'$ und $\tan D = \tan(A - B) = 0$ und $A - B = 0$, so ist $A = B$ und die beiden Linien schneiden eine dritte, die Axe, unter gleichen Winkeln. Ist also $y = ax + b$ die Gleichung der gegebenen und $y = a'x + b'$ die Gleichung der unbekannten geraden Linie, so hat man den Werth von a' und b' zu bestimmen. Diese Linie soll durch einen gegebenen, d. h. durch einen solchen Punkt gehen, der mit den Coordinaten α und ω zusammengehört. Es ist daher $\omega = \alpha a' + b$, folglich $y - \omega = a'(x - \alpha)$. Soll nun die gesuchte gerade Linie mit der gegebenen parallel seyn, so darf man nur den Winkel $a = a'$ machen.

3. Zus. Sollen nun zwei gerade Linien, deren erste bekannt und durch die Gleichung $y = ax + b$ gegeben, die andere aber durch die Gleichung $y = a'x + b'$ ausgedruckt worden ist, einen Winkel von gegebener Größe einschließen, so darf man nur, wenn die Tangente des verlangten Winkels $= t$ ist, $t = \frac{a - a'}{1 + aa'}$ setzen und hieraus den Werth von a' bestimmen und in die Gleichung $y - \omega = a'(x - \alpha)$ setzen. Es ist aber $a = \frac{a - t}{1 + at}$, folglich $y - \omega = \left(\frac{a - t}{1 + at}\right)(x - \alpha)$.

4. Zus. Soll man den Begegnungspunkt zweier durch die Gleichungen $y = ax + b$; $y = px + q$ gegebenen, in einerlei Ebene liegenden Linien finden, so kann man wegen der genannten Bedingung annehmen, daß die Coordinaten des Durchschnittspunktes einerlei Größe, folglich hier x und y in beiden Gleichungen dieselben Werthe annehmen. Alsdann ist $ax + b = px + q$, folglich $x = \frac{b - q}{p - a}$ und $y = \frac{bp - aq}{p - a}$.

§. 6. Aufg. Den senkrechten Abstand eines gegebenen Punktes von einer gegebenen geraden Linie zu bestimmen.

Aufl. Wenn $y = ax + b$ die Gleichung der gegebenen

geraden Linie ist und α, β die Coordinaten des gegebenen Punktes bezeichnen, so muß man von diesem auf jene eine senkrechte Linie herablassen, den Begegnungspunkt beider Linien suchen und den senkrechten Abstand bestimmen. Die Gleichung $y = ax + b$ läßt sich auf folgende Art vorstellen:

$y - \beta = ax - a\alpha + b - \beta + a\alpha = a(x - \alpha) + b - \beta + a\alpha.$

Wegen des gemeinschaftlichen Durchschnittspunktes erhält man $y - \beta = -\frac{1}{a}(x - \alpha)$, folglich ist $a(x - \alpha) + b - \beta + a\alpha = -\frac{x}{a} - \frac{\alpha}{a}$. Durch bekannte Umformungen dieser Gleichung erhält man:

$(a^2 + 1)x - \alpha(a^2 + 1) = a(\beta - b - a\alpha)$, folglich

$x - \alpha = \frac{a(\beta - b - a\alpha)}{1 + a^2}$ und $y - \beta = -\frac{\beta - b - a\alpha}{1 + a^2}$

Die Summe dieser Quadrate in $\sqrt{[(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2]}$ gesetzt, gibt den verlangten Abstand

$$\sqrt{\left(\frac{(a^2 + 1)(\beta - b + a\alpha)}{(1 + a^2)}\right)^2} = \frac{\beta - b + a\alpha}{\sqrt{(1 + a^2)}}.$$

c) Vom Kreise.

§. 7. Aufg. Die Gleich. einer Kreislinie zu finden, zu dessen Bestimmung zwei beliebige, unter einem rechten Winkel sich

schneidende, gerade Linien als Coordinaten angenommen werden.

Aufl. Die Linien AB und AD (Fig. 4) mögen die Coordinaten, A ihren Anfangspunkt, AH = CD = a, den unveränderten Abstand der Ordinate AD von FH, AD = HC = b, eben so den Abstand der Abscissenlinie AB von DC, QM die zu dem Punkte M gehörige Ordinate y, AQ die zu dem Punkte M gehörige Abscisse x und r den gegebenen Halbmesser bezeichnen, so kommt es nun darauf an, einen Ausdruck analytisch zu entwickeln, aus welchen hervorgeht, daß jeder Punkt M des Umfanges von dem Mittelpunkt C gleich weit entfernt sey.

Da nun $CM^2 = CP^2 + PM^2$ (E. G. §. 62. Z. 1.) und $CP = HQ = AQ - AH = x - a$, $PM = QM - PQ = QM - HC = y - b$, so folgt, daß wenn man diese Werthe ins Quadrat erhebt und sie in die obige Gleichung schreibt, $r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$ oder $y - b = \sqrt{[r^2 - (x-a)^2]}$ folgl. $y = b \pm \sqrt{[r^2 - (x-a)^2]}$ sey. — Das doppelte Vorzeichen vor der Wurzelgröße gibt zu erkennen, daß mit jeder Abscisse x zwei gleiche Ordinaten, deren eine über, die andere unter dem Durchmesser liegt, zusammen gehören.

Diese Gleichung ist sehr allgemein und es lassen sich aus ihr mancherlei nützliche Folgen ableiten.

1) Rückt die AD der HC und die AB der DC

immer näher, so werden a und b immer kleiner. Fällt endlich AD mit HC und AB mit DC zusammen, so verschwinden dadurch a und b und die Gleichung nimmt die weit einfachere Gestalt $y = \sqrt{(r^2 - x^2)}$ oder $r^2 = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ an, unter welcher sie in der Analysis häufig vorkommt.

2. Nimmt man E als den Anfangspunkt des Durchmessers und zugleich der Coordinaten an, so wird, wenn AB mit DG zusammenfällt, $AH = EC = a = r$ und $b = o$, folglich die Hauptgleichung $r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 = x^2 - 2ax + r^2 + y^2$, oder $o = x^2 - 2rx + y^2$, folglich $y = \pm \sqrt{(2rx - x^2)}$, eine Gleichung des Kreises, deren man sich in der Theorie und Anwendung häufig bedient.

§. 8. Aufg. Die Linie zu finden, welche der gegebenen Gleichung $y^2 = 2rx - x^2$ zugehört.

Aufl. Man kann sich zwar vermittelst dieser Gleichung so viel Punkte suchen als man will, um die Gestalt dieser Linie auf eine Ebene zu zeichnen, indem sie genöthigt wird, durch alle vorhin gefundenen Punkte hindurch zu gehen. Allein auch durch Schlüsse kann man sich ein sehr richtiges Bild von dem Umriß und der Gestalt einer solchen Figur entwerfen und ihren Gang, so weit man will, verfolgen.

Aus $y^2 = 2rx - x^2$ folgt, daß $y = \pm\sqrt{(2rx - x^2)}$ sey. Trägt man diese Gleichung auf die Figur über, so läßt sich aus ihr ersehen, daß zu jedem x zwei gleiche und entgegengesetzte Ordinaten gehören und die ganze Figur aus zwei gleichen und ähnlichen Stücken zusammengesetzt sey. — Legt man nun dem x, als einer veränderlichen Größe, besondere bejahte oder verneinte Werthe bei, wovon der Werth von o nicht ausgeschlossen ist, so findet man im ersten Falle, daß beide Werthe von y möglich sind, so lange $2rx > x^2$ oder $2r > x$ ist, von dem Anfangspunkte in E an gerechnet. Ist aber x verneint, oder ist $x > 2r$, so ist über E hinaus nach D, oder auch über G hinaus nach K keine senkrechte Ordinate möglich, welche irgend einen Punkt der gesuchten Linie erreichen könnte, d. h. die ganze Figur ist also auf den Theil der Ebene eingeschränkt, welcher zwischen den durch E und G mit FH parallel laufenden Linien, enthalten ist. Ist $x = o$, oder auch $x = 2r$, so wird y in beiden Fällen $= o$, d. h. an diesen beiden Stellen $= o$ und die Ordinaten haben keine Größe, und da durch ihre Endpunkte die gesuchte Linie gehen soll, so fällt sie hier mit der Axe zusammen, oder die Axe wird an zweien Stellen geschnitten. Sämmtliche Werthe von x, die mit möglichen Werthen von y zusammen gehören, sind bejaht und zwi-

schen den Grenzen von o bis $2r$ enthalten. Vergleicht man nun die Abscissen mit den Größen der beständigen Linien r, so wird man finden, daß y mit x wächst, so lange $x < r$ ist, daß y am größten wird, wenn $x = r$, folglich $y = \pm\sqrt{(2rr - r^2)} = \pm r$ ist und daß y wieder abnimmt, wenn x die Größe von r überschreitet, und daß zu den Abscissen, welche entstehen, wenn man $x = r + p$ und $= r - p$ ꝛc. setzt, Ordinaten von gleicher Größe, jede aber $< r$, gehören, so ist $y = \pm\sqrt{(2rx - x^2)}$ für $x = r + p$ angenommen, $y = \pm\sqrt{(r^2 - p^2)}$ und für $x = r - q$ erhält man y ebenfalls, $= \pm\sqrt{(r^2 - p^2)}$. Hieraus folgt, daß $y^2 = r^2 - p^2$ oder $r^2 = y^2 + p^2$ oder $r = \pm\sqrt{(y^2 + p^2)}$ sey, eine Gleichung, welche die bekannte Eigenschaft des Kreises ausdruckt.

Von den Gleichungen der Kegelschnitte überhaupt.

§. 9. Wenn man zwei an ihrem Scheitel einander entgegengesetzte gleiche gerade Kegel, deren Axen in einerlei Richtung liegen, mittelst einer Ebene durchschneidet, so bilden sich auf ihrer Oberfläche Figuren ab, die den Nahmen der Kegelschnitte führen, deren Gestalt von der Lage der schneidenden Ebene, gegen die Axe oder Seite der Kegel abhängt. Aus der

Stereometrie ist bekannt, daß die durch die Axe des Kegels geführte oder der Grundfläche parallel gelegte Ebene ein gleichschenkliges Dreieck, oder ein Kreis sey. Ausserdem gibt es noch unzählige andere Richtungen, nach welchen Kegel geschnitten werden können, und die schneidende Ebene nimmt bei der wirklichen Umdrehung um einen festen Punkt in der Seite des Kegels in jeder andern Lage, eine andere Gestalt an. Indeß hat man nicht nöthig auf diese einzelnen Fälle Rücksicht zu nehmen, sondern die Sache läßt sich durch folgende Aufgabe aus einem weit allgemeinern Gesichtspunkte betrachten.

§. 10. Aufg. Die Gleichung der krummen Linie EMG (Fig. 5.) zu finden, welche entsteht, wenn ein gerader Kegel vermittelst einer Ebene, nach einer beliebigen Richtung geschnitten wird.

Aufl. Man lege durch die Axe AX des Kegels eine Ebene, so gibt ihr Durchschnitt mit dem Kegel, das Dreieck ABD. Durch einen beliebigen Punkt E in der Seite dieses Dreieckes, durchschneide man den Kegel mit einer auf dem Axendreieck senkrecht stehenden Ebene. Der Durchschnitt EG dieser beiden Ebenen ist die Axe des Kegelschnittes, welche wir mit a bezeichnen wollen. Durch einen willkürlichen Punkt P derselben, lege man eine der Grundfläche

parallellaufende Ebene. Ihr Durchschnitt mit dem Kegel gibt alsdann den Kreis HMK und mit der schneidenden Ebene, die gerade Linie NPM, welche so wohl auf EG als HK senkrecht steht (Körp. §. 8.) und daher eine gemeinschaftliche Ordinate beider krummen Linien ist.

Es sey daher $EP = x$, $PM = y$; $AE = e$ der Winkel $BAD = \alpha$, und $AEG = \beta$, so ist $PM^2 = HP.PK$ oder $y^2 = HP.PK$. Es verhält sich aber $PK : PE = \sin PEK : \sin PKE$ (Trig. §. 16.) oder $= \sin\beta : \cos\frac{1}{2}\alpha$; weil PKE den halben Winkel von α, d. i. $\frac{1}{2}\alpha$ zu 90°, ergänzt; also ist $\sin PKE = \cos\frac{1}{2}\alpha$ (Trig. §. 43. 1.). Daher ist $PK = \frac{x \sin\beta}{\cos\frac{1}{2}\alpha}$. Ferner ist $HP : PG = \sin HGP : \sin PHG$ oder $HP : a - x = \sin(\alpha + \beta) : \cos\frac{1}{2}\alpha$, folglich ist $HP = \frac{(a-x)\sin(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}\alpha}$. Endlich verhält sich $a : e = \sin\alpha : \sin(\alpha+\beta)$, folglich ist $a = \frac{e \sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$. Schreibt man nun diesen Werth für a in HP, so findet man $HP = \left(\frac{e \sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} - x\right)\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}\alpha}$. Hieraus ergibt sich $y^2 = PK.HP = \frac{\sin\beta}{\cos\frac{1}{2}\alpha}$ (x e sin α — x^2 $\sin(\alpha+\beta)$].

§. 11. Bei der wirklichen Umdrehung der schneidenden Ebene um den Punkt E, ist die Summe der beiden Winkel $\alpha + \beta$ entweder $< = >$ 180°. Im ersten Falle geht die schneidende Ebene durch die andere Seite des Kegels, die Linie begrenzt einen bestimmten Theil der schneidenden Ebene und führt den Nahmen Ellipse, dessen etymologische Bedeutung sich in der Folge leicht wird angeben lassen.

II) Ist $\alpha + \beta = 180°$, so läuft die schneidende Ebene mit der Seite des Kegels parallel. Die sich dadurch auf der Kegelfläche abbildende krumme Linie wird die Parabel genannt, die Schenkel derselben gehen ohne Ende fort, und die Gleichung dieser Linie nimmt, weil $\sin(\alpha + \beta) = \sin 180 = 0$ ist, die einfachere Gestalt $y^2 = \frac{4 \sin \frac{1}{2}\alpha^2 \cos \frac{1}{2}\alpha^2}{\cos \frac{1}{2}\alpha^2} ex = 4 \sin \frac{1}{2}\alpha^2 ex$ an.

Ist endlich III) $\alpha + \beta > 180°$, so ist $\sin(\alpha + \beta)$ eine verneinte Größe (Trig. §. 10.); dadurch wird das zweite Glied in der andern Hälfte der obigen Gleichung bejaht und es ist $y^2 = \frac{\sin \beta}{\cos \frac{1}{2}\alpha^2} [xe \sin \alpha + x^2 \sin(\alpha + \beta)]$. Es stellt also die gefundene Hauptgleichung die Ellipse, Hyperbel oder Parabel vor, je nachdem der Coefficient von x^2 verneint, bejaht oder 0 ist. Nimmt man nun den Werth von y, so wird man

man bemerken, daß in diesen drei Kegelschnitten zu jeder Abscisse x zwei gleiche aber entgegengesetzte Ordinaten gehören, ein Kennzeichen, daß die Abscissenlinie jede dieser krummen Linien in zwei gleiche Theile theilet, und daß sie, wenn sie nach der Richtung der Axe über einander gelegt werden, einander decken.

a) Von der Parabel.

§. 12. Um die Eigenschaften dieser Linie aus der vorher gefundenen Gleichung weiter abzuleiten, wollen wir den beständigen Faktor von x mit einem einzelnen Buchstaben bezeichnen, so, daß nunmehr $y^2 = px$ die Gleichung der Parabel vorstellt.

In Bezug auf die Figur EPM (Fig 6.), welche nun besonders auf einer Ebene liegend, verzeichnet werden kann, bedeutet x die auf der Axe EX von E als dem Scheitelpunkt aus, nach Willkür abgeschnittenen Stücke oder die Abscissen EP, EP′ oder EP″; y die dazu gehörigen Ordinaten PM, PM′ oder PM″ ꝛc.; die gegebene beständige Größe p heißt der **Parameter** der Parabel. Ist der Werth von p unbekannt, so wird er gefunden, so bald ein Punkt M der krummen Linie bekannt ist. Denn ein Punkt M der krummen Linie ist gegeben, heißt die zu diesem Punkte gehörigen Coordinaten x und y sind gegeben. Daher folgt aus der Gleichung $y^2 = px$, daß p =

M

$\frac{y^2}{x}$ oder daß p die dritte geometrische Proportional-linie zu x und y sey.

§. 13. Ferner gibt diese Gleichung $y^2 = px$ zu erkennen, daß die zu derselben gehörige Linie an jeder andern Stelle eine andere Richtung habe. Die Gleichung $y^2 = px$, gibt die Prop. $p : y = y : x$. Das erste Verhältniß derselben ist veränderlich, also muß es das andere auch seyn. Hieraus folgt nun: α) es gibt in der Ebene unzählige Punkte, welche alle die verlangten Eigenschaften haben und β) diese Punkte können, wenn sie mit einander verbunden werden, nicht in einer geraden Linie liegen. Es druckt demnach γ) die gefundene Gleichung die Natur einer krummen Linie aus, deren Gang um so viel vollkommener dargestellt werden kann, je mehr Punkte zu deren Bestimmung aufgesucht werden.

Beide Ausdrücke Parameter und Parabel sind aus dem Griechischen entlehnt. Löset man $y^2 = px$ in Worte auf, so liegt darin der Satz: das Quadrat einer jeden Ordinate ist einem Rechtecke gleich, dessen Grundlinie der Parameter und dessen Höhe die zu der y gehörige Abscisse x ist. Es wird also das Quadrat y^2 mit Hülfe der beständigen Größe p ausgemessen und dem Rechtecke immer gleich, gefunden.

Jenes deutet das Wort Parameter, dieses der Ausdruck Parabel an.

Ziehet man nun aus der Gleichung $y^2 = px$ auf beiden Seiten die Quadratwurzel aus, so erhält man $y = \pm \sqrt{px}$. Das zweideutige Vorzeichen ist von der Wurzelgröße unzertrennlich. Es hat demnach jede Ordinate y zwei Werthe, welche in Absicht der Größe nicht verschieden sind. Denn beide sind so groß als die Quadratwurzel aus px; allein im ersten Falle wird diese Größe genommen mit dem Vorzeichen +, im andern mit dem Vorzeichen —. Daher hat y zwei gleiche aber entgegengesetzte Werthe. Druckt also PM über EX den einen Werth aus, so muß es noch einen andern Werth geben, der PM entgegen gesetzt und ihm gleich ist, d. i. PN. Alle Veränderungen, die nun y erleiden kann, rühren, weil die Gleichung $y = \pm \sqrt{px}$ immer bestehen soll, entweder von p oder von x oder von beiden zusammen her. Da p eine gegebene beständige Größe ist, so darf man nur auf x sehen. Nun kann man aber schon mancherlei merkwürdige Eigenschaften der krummen Linie kennen lernen, wenn man x Werthe beilegt, die nach ihrer Beschaffenheit das Produkt, mithin auch die Quadratwurzel aus dem Produkt, also auch die der Quadratwurzel gleiche Größe, auf eine bestimmte Art verändern. $y = \pm \sqrt{px}$ hat allemahl

zwei Werthe, beide sind zugleich, entweder möglich oder unmöglich. So lange x positiv bleibt, so lange hat y zwei mögliche, obgleich in Zahlen nicht immer rationale Werthe. Nimmt man für x eine negative Zahl an, so erhält das Produkt px das Vorzeichen — und y hat nun zwei unmögliche Werthe. Nimmt man o für x, so wird px mithin auch $\sqrt{px}$ und also auch y=o, d. i. da wo x verschwindet und keine Größe hat, hat auch y keine Größe, d. h. in Bezug auf die Figur, beide Größen x und y fallen in einen Punkt zusammen und in diesem Punkte muß die krumme Linie die X'X schneiden, und er muß also in E seyn.

Nimmt man nun bei den angeführten Eigenschaften auf den Gang, die Größe und Beschaffenheit der krummen Linie Rücksicht, so siehet man hieraus, daß wenn man für x die Linien nach und nach auf EX von E aus abschneidet, die senkrechten Linien PM, PM ꝛc. immer größer werden, je größer x ist, daß sich die Figur also auf dieser Seite immer mehr und mehr uud zwar zu beiden Seiten über und unter EL ohne Ende fort erweitert, weil mit PM allemahl der entgegengesetzte Werth PN verbunden ist; daß beide Werthe für x=o in A zusammenfallen und endlich daß die krumme Linie sich über E nach EX' nicht ausdehnen kann, weil —x, auf

EX', welches dem EX entgegengesetzt ist, genommen werden muß, wo es für y durch dessen Endpunkt die krumme Linie fortläuft, keine mögliche Werthe mehr gibt.

Wir können nun diese Gleichung $y = \pm \sqrt{px}$ benutzen, den Gang dieser krummen Linie auf eine sinnliche Art, vor Augen zu legen, indem man sämmtliche Größen p, x und y als lauter aus einerlei Einheit entstandene Zahlen betrachtet, dem Parameter einen beständigen Werth beilegt, für x Zahlen von beliebiger Größe annimmt, daraus die dazugehörigen Werthe von y ableitet, und die Ordinaten durch eine Linie so verbindet, daß sie durch deren Endpunkte gehen muß. Folgendes Beispiel, welches nach der Gl. $y = \pm \sqrt{p}\sqrt{x}$ berechnet wird, soll dieses näher erläutern. Es sey $p = 4$; so ist $\sqrt{p} = 2$ und alsdann geben die angenommenen Werthe für x die damit zusammengehörigen Werthe für y. Setzt man demnach $x = 0$, $x = 1 = EP$, $x = 2 = EP'$, $x = 3 = EP''$ $x = 4 = EP'''$ ꝛc., so erhält man nach der Reihe

$y = 0$,

$y = +2\sqrt{2} = P'M' = +2{,}828427$, $= -2\sqrt{2} =$
$P'N = -2{,}828427$

$y = +2\sqrt{3} = P''M'' = +3{,}4641016$, $= -2\sqrt{3} =$
$P''N'' = -3{,}4641016$.

$y = +{}^2\sqrt{4} = P'''M''' = +4, = -{}^2\sqrt{4} = P'''N'''$
$= -4$

$y = +{}^2\sqrt{5} = P^{IV}M^{IV} = +4{,}472136, = -{}^2\sqrt{5} =$
$P^{IV}N^{IV} = -4{,}472136$

$y = +{}^2\sqrt{6} = P^{V}M^{V} = +4{,}8989794 = -{}^2\sqrt{6} =$
$P^{V}N^{V} = -4{,}8989794$

$y = +{}^2\sqrt{7} = P^{VI}M^{VI} = +5{,}2915026 = -{}^2\sqrt{7} =$
$P^{VI}N^{VI} = -5{,}2915026$

$y = +{}^2\sqrt{8} = P^{VII}M^{VII} = 5{,}6568542 = -{}^2\sqrt{8} =$
$P^{VII}N^{VII} = -5{,}6568542$

$y = +{}^2\sqrt{9} = P^{VIII}M^{VIII} = 6, = -{}^2\sqrt{9} = P^{VIII}M^{VIII}$
$= -6.$

.
.
.

$y = +{}^2\sqrt{10000} = P^{(n)}M^{(n)} = +200, = -{}^2\sqrt{10000}$
$= P^{(n)}N^{(n)} = -200.$

Will man die Ordinaten PM, P′M′ durch Zeichnung bestimmen, so kann man die mittlere geometrischen Proportionallinien zwischen den Linien p und EP, p und EP′ ꝛc. suchen.

§. 14. Eine Gleichung von der Form $y^2 = mx$ gehört einer Parabel zu, deren Parameter $= m$ ist.

Man darf sich nur erinnern, daß der Werth des Parameters p eigentlich $4\cos\frac{1}{2}\alpha^2 e$ gefunden und zur Abkürzung mit einem einzelnen Buchstaben, wie hier

mit m bezeichnet worden ist. In diesem Ausdruck bezeichnet aber α den Winkel an den Scheitelpunkte A des Kegels und e den Abstand zwischen dem Scheitelpunkten des Kegels und der Parabel. Ist nun BAD (Fig. 5.) ein solcher Kegel, dessen Winkel an der Spitze d. i. BAD $=\alpha$ ist, so erhält man aus der gegebenen Gleichung $m=4e\cos\frac{1}{2}\alpha^2$ folglich ist $e=\frac{m}{4\cos\frac{1}{2}\alpha^2}$. Legt man also in der Entfernung $e=\frac{m}{4\cos\frac{1}{2}\alpha^2}$ durch einen Punkt E der Seite des Kegels eine auf dessen Axendreieck ABD senkrecht stehende und mit der andern Seite AB parallellaufende Ebene, so bildet sich auf der Kegelfläche eine Linie ab, welcher die Gleichung $y^2=mx$ zugehört.

§. 15. Sind zwei Punkte einer Parabel gegeben, so verhalten sich die Quadrate ihrer Ordinaten, wie die dazu gehörigen Absciſſen.

Wenn (Fig. 6.) M und M′ die gegebenen Punkte, $EP=x$, $EP'=X$ ihre Absciſſen und $PM=y$, $P'M'=Y$ die dazugehörigen Ordinaten sind, so findet für jeden Punkt M,M′ der Parabel dieselbe Gleichung zwischen den Coordinaten Statt. Es ist also $y^2=px$; $Y^2=pX$; folglich ist $y^2:Y^2=x:X$.

Nimmt man von den vier Proporzionalgrößen die Quadratwurzeln, so ist $y : Y = \sqrt{x} : \sqrt{X}$.

§. 16. Aufg. Einen Punkt auf der Axe der Parabel zu finden, welcher so beschaffen ist, daß der Abstand desselben, von jedem Punkt der Parabel, durch einen rationalen Werth, vollkommen genau dargestellt werde.

Es sey M ein beliebiger Punkt der Parabel, EP $= x$, PM $= y$ und F der gesuchte Punkt, so ist FP $=$ EP $-$ EF $= x - c$, wenn man EF $= c$ setzt. Nun ist $FM^2 = PM^2 + PF^2 = y^2 + (x-c)^2$

$$= x^2 + px - 2cx + c^2 = x^2 + x(p - 2c) + c^2$$

Soll nun dieses Trinomium einen rationalen Werth ausdrucken, so muß $p - 2c = 2c$, folglich $p = 4c$, oder $c = \frac{1}{4}p$ seyn. Der verlangte Punkt der Parabel wird also gefunden, wenn man F in einer Entfernung von E nimmt, welche den vierten Theil des Parameters beträgt.

§. 17. Erkl. Dieser Punkt F wird der Brennpunkt der Parabel genannt und führt zur Kenntniß folgender merkwürdigen Eigenschaften:

1) Ist der rationale Werth einer jeden geraden, von F bis zu einem beliebigen Punkt M der Parabel gezogenen Linie $FM = \sqrt{(x^2 + 2cx + c^2)} = x + c =$

$x + \frac{1}{4}p$. Diese Linien FM, FM′ ꝛc. der Parabel werden radii vectores genannt.

2) Stellt jede durch den Brennpunkt F der Axe senkrecht durchgezogene gerade Linie, die Länge des Parameters vor. Denn hier ist $x = c = \frac{1}{4}p$, folglich $y^2 = px$ oder nach der Lage dieser Ordinaten $y^2 = \frac{1}{4}p^2$, folglich $y = \frac{1}{2}p$ und $2y = p$.

3) Aus einer Parabel und dessen Scheitelpunkt, läßt sich ihre Axe, ihr Parameter, die Ordinate und die doppelte Ordinate, welche dem Parameter gleich ist, bestimmen.

4) Ziehet man in der Entfernung von $\frac{1}{4}p$ durch die auf der andern Seite verlängerte Axe eine Parallele GH zu PM, so sind alle Punkte der Parabel von dieser Linie H so weit entfernt, als von dem Brennpunkte F. Diese gerade Linie GH wird die Richtungslinie (linea directrix) der Parabel genannt. und jeder Punkt der Parabel steht also von der Richtungslinie und dem Brennpunkte gleich weit ab. Es ist HM (Fig. 7.) $=$ GP $= x + \frac{1}{4}p$ und FM $= x + \frac{1}{4}p$, folglich HM $=$ FM.

Anm. Der Grund der Bezeichnung des Punktes F in der Parabel mit dem Worte Brennpunkt oder vielmehr Brennraum liegt in der Wirkung der Lichtstrahlen eines nach dieser Linie geschliffenen Spiegels. Denn die auf einen solchen Spiegel in paralleler Richtung fallenden Lichtstrahlen, werden so zurückgeworfen,

daß sie beinahe sämmtlich durch diesen Punkt gehen und dadurch die Kraft derselben an dieser Stelle ungemein verstärken.

§. 18. Aufg. Vermittelst des gegebenen Parameters, eine Parabel zu beschreiben.

Aufl. Man nehme (Fig. 8.) AX als die Axe und A als den Scheitelpunkt der Parabel an, trage auf die Linie AX den vierten Theil des Parameters von A nach C und F, so daß $AC = \frac{1}{4}p$ werde. Hierauf ziehe man RS und durch die Punkte F, P, P′, P″ ꝛc. Nn, Mm, M′m′ ꝛc. von unbestimmter Länge mit RS parallel. Nun setze man die eine Spitze des Zirkels in C ein, eröffne ihn bis an jeden Durchschnittspunkt der Axe mit den gedachten Parallelen und mache mit der Weite von CF von F aus Einschnitte in N und n, mit CP in M und m, mit CP′ in M′ und m′ ꝛc. immer von dem Brennpunkte aus. Endlich ziehe man diese Punkte vermittelst einer Linie zusammen, so wird diese die verlangte Parabel und zwar desto genauer seyn, je mehr Punkte man zu deren Bestimmung angenommen hat.

Bew. Daß diese Punkte alle in der Parabel liegen, erhellet daraus, weil z. B. der Punkt M in der Linie MPm dadurch bestimmt ist, daß mit der Entfernung CP von F aus die gedachte Linie als

mit dem Halbmesser durchschnitten wurde. Es ist demnach FM = CP, allein CP = CA + AP, d. i. $\frac{1}{4}p + x$. Dieses läßt sich von jedem andern Punkte M′M″ ꝛc. zeigen.

§. 19. Aufg. An den gegebenen Punkt M (Fig. 9.) eine Tangente, d. i. eine solche gerade Linie zu ziehen, die mit der Parabel ausser M keinen gemeinschaftlichen Punkt hat und welche ganz ausserhalb der krummen Linie fällt.

Aufl. Man ziehe durch den Punkt B der von A um AB, d. i. $\frac{1}{4}p$ entfernt ist, eine gerade Linie RB, welche mit AX einen rechten Winkel RBX einschließt. Nun verbinde man F und M durch eine gerade Linie und MR ziehe man senkrecht auf BZ, verbinde auch die Punkte R und F vermittelst einer geraden Linie, theile FR in C in zwei gleiche Theile oder halbire den Winkel bei M, so wird CM die verlangte Tangente seyn.

Bew. Es ist demnach zu beweisen, daß die Tangente NT außer M keinen andern Punkt mit der Parabel gemein hat. Denn gienge dieselbe noch durch einen andern Punkt N, so kann man zeigen, daß dieser Punkt nicht so weit von der BZ als dem Brennpunkte entfernt, also kein Punkt der Parabel ist. Man nehme also an, N wäre beiden Linien

der Tangente und der Parabel gemein, so ist RM $=$MF, weil RM$=$BA$+$AP$=\frac{1}{4}p+x=$MF; ferner MN$=$MN und der W. RMN$=$FMN, weil jeder ein Nebenwinkel von zwei gleichen Winkeln o und x ist. Daher decken sich die Dreiecke RMN und FMN und folglich ist RN$=$FN. Nun ist der W. RON$=$R, folglich im $\triangle$ RON die Seite NO$<$NR. Also liegt N der BZ näher als dem Brennpunkte; folglich liegt N nicht in der Parabel.

§. 20. Erkl. Ziehet man nun durch M nach der Axe eine gerade Linie MQ, die mit der Tangente einen rechten Winkel einschließt, so heißt die Linie MQ die Normallinie; und wenn man die Tangente bis an die Axe verlängert, das Stück PT zwischen der Ordinate und dem Durchschnittspunkte der Tangente, die Subtangente, das Stück PQ zwischen der Ordinate und der Normallinie die Subnormallinie für den Punkt M.

§. 21. Die Subtangente einer Parabel ist so groß als die doppelte Abscisse des Berührungspunktes.

Bew. Zieht man durch die Punkte M und N (Fig. 10.) die Secante VN und drehet man die VN so, daß sie von V nach Q rückt, bis sie die Lage TM erhält, so rücken während dieser Bewegung, die Punkte M und N immer näher, in der gedachten

Lage fallen sie zusammen, die Secante wird eine Tangente des Punktes M und TP die Subtangente. Nun setze man AP = x, PR = k, folglich AR = x + k, ferner sey VP = S, so ist VR = S + k; folglich $VT^2 = S^2$ und $VR^2 = S^2 + 2Sk + k^2$. Nun verhält sich nach (§. 15) $PM^2 : RN^2 = AP : AR = x : x + k$. Es verhält sich aber auch $PM^2 : QN^2 = S^2 : (S + k)^2$ (§. 131. Eb. Geom.), folglich ist $S^2 + 2Sk + k^2 : S^2 = x + k : x$ oder $2Sk + k^2 : S^2 = k : x$ und nach (§. 51. Alg.) $2Skx + k^2x = kS^2$; oder $2Sx + kx = S^2$. Diese Schlüsse gelten für die erste Lage der VN als Secante; kommt sie aber durch Umdrehung in die andere Lage, so daß sie bloß den Punkt M der Parabel berührt, so wird $k = 0$. Dadurch erhält die obige Gleichung folgende Gestalt $2Sx = S^2$, also ist $S = 2x$.

§. 22. **Die Tangente, Subtangente, Normale und Subnormale der Parabel für den gegebenen Punkt M zu finden.**

Aufl. Es sind hier vermöge der Aufgabe vier Ausdrücke anzugeben. Es ist demnach (Fig. 9.)

1) die Subtangente $TP = 2x$

2) die Subnormale $PQ = \frac{1}{2}p$

3) die Tangente $TM = \sqrt{(px + 4x^2)}$

4) die Normale $MQ = \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + px)}$.

1) Die Subtangente PT ist nach (§. 21.) der doppelten Absciſſe AP gleich.

2) Die Subnormallinie ist dem halben Parameter gleich. Denn es ist $TP:PM=PM:PQ$ oder $S:y=y:PQ$, folglich $PQ=\frac{y^2}{S}=\frac{y^2}{2x}=\frac{px}{2x}=\frac{1}{2}p$.

3) Die Tangente ist, $=\sqrt{(px+4x^2)}$. Es ist nehmlich $TM^2=TP^2+PM^2$; TP aber ist $=2x$ gefunden worden, folglich ist $TP^2=4x^2$; $PM^2=y^2=px$, folglich $TM^2=px+4x^2$, und $TM=\sqrt{(px+4x^2)}$.

4) Die Normallinie, ist $=\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+px)}$. Denn es ist $MQ^2=PM^2+PQ^2$ oder $QM^2=\frac{1}{4}p^2+px$, folglich $QM=\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+px)}=\sqrt{[p(\frac{1}{4}p+x)]}$.

1. Zuſ. Da nun die Subtangente der doppelten Absciſſe gleich ist, so ergiebt sich hieraus ein sehr einfaches Mittel die Tangente durch einen gegebenen Punkt M zu ziehen, indem man $AT=AP=x$, folglich $PT=2x$ macht und T und M durch TM verbindet, welches die verlangte Tangente ist.

2. Zuſ. Soll nun aus einem gegebenen Punkte D (Fig 9.) auſſerhalb der Parabel, eine Tangente an selbige gezogen werden, so muß man mit dem Abstande dieses Punktes D vom Brennpunkte F die Richtungslinie in L durchschneiden, durch L mit der Axe AX eine Parallele ziehen, D und den Durchschnittspunkt E der Curve und der Parallele mit einander

durch eine gerade Linie DE verbinden, so wird diese Linie, weil sie den Winkel am Berührungspunkte halbirt, die verlangte Tangente seyn.

3. Zus. Das Quadrat der senkrechten Linie CF ist so groß als das Produkt aus dem Radius Vektor in den vierten Theil des Parameters.

4. Zus. Die Quadrate der senkrechten Linien, welche aus dem Brennpunkte auf zwei Tangenten einer Parabel herabgelassen werden, verhalten sich, wie die an die Berührungspunkte gezogenen Radii Vectores.

§. 23. Wird aus einem beliebigen Punkte M (Fig. 6.) der Parabel, ausser dem Scheitel E die MQ winkelrecht auf eine Ordinatenlinie M'''N''' herabgelassen, so sind die Rechtecke aus den beiden Abschnitten M'''Q und N'''Q und aus dem Parameter in den Perpendikel MQ einander gleich. Denn es ist $P'''M'''^2 - PM^2 : P'''M'''^2 = (EP''' - EP)\,p : EP'''p$. Da aber $P'''M'''^2 = EP'''p$, so ist $P'''M'''^2 - PM^2 = (EP''' - EP)p$ oder $P'''M''' + PM \times P'''M''' - PM = MQ . p$, d. i. $N'''Q \times QM''' = MQ . p$, welches zu zeigen war.

Zus. Wird nun eine gerade Linie M'''N''' durch zwei andere senkrechte Linien so getheilt, daß

die eine EP''' durch ihre Mitte P''', die andere MQ durch einen beliebigen Punkt Q geht, so liegen die Punkte N''', E, M, M''' in einer Parabel, deren Axe EP''' ist, wenn $N'''P'''^2 : N'''Q \times QM''' = EP''' : MQ$. Denn es ist $N'''Q \times QM = N'''P^2 - PM^2$ (§. 23. und $QM = EP''' - EP$. Nach der Voraussetzung ist aber $N'''P'''^2 : N'''Q \times QM = EP''' : MQ$. Daher ist $N'''P'''^2 : N'''P'''^2 - PM^2 = EP''' : EP - EP$; folglich verhält sich $PM^2 : P'''N'''^2 = EP : EP'''$, d. h. es verhalten sich die Quadrate der Ordinaten, wie die ihnen zugehörigen Abscissen. Also liegen die Punkte N''', E, und M in der Parabel und auch M''', weil $P'''N''' = P'''M'''$ ist.

§. 24. **Eine Gleichung für die Parabel zu finden, wenn man durch einen gegebenen Punkt derselben eine Tangente und eine der Axe parallele Linie zieht, diese als Abscissenlinien und die darauf angenommenen Parallelen der Tangente, als Ordinaten betrachtet.**

Es sey CM (Fig. 11.), die durch den Punkt M der Parabel gezogene Tangente, MR eine durch eben diesen Punkt, mit der Axe parallellaufende Linie. Durch einen beliebigen Punkt O dieser neuen Abscisse, ziehe man die Ordinatenlinie BOM', so sind wegen des gegebenen oder nach Willkür angenommenen Punktes

tes M, folgende Größen bekannt: $EP=\alpha$, $PM=\omega$ und $FM=c$. Ueberdieß setze man $MO=t$, $M'O=u$, $EP'=x$, $P'M'=y$, $PP'=MR=MO+OR=t+OR=k$, $RM'=\lambda$ und $CM=T$, so ist $x=\alpha+k$, $y=\omega+\lambda$ und da $y^2=px$, auch $(\omega+\lambda)^2=p(\alpha+k)$ oder $\omega^2+2\omega\lambda+\lambda^2=p\alpha+pk$ oder $\lambda^2+2\omega\lambda=pk$, weil $\omega^2=p\alpha$ ist; oder $\lambda^2+2\omega\lambda=pt+p.OR$. Nun ist aber $\lambda=\frac{u\omega}{T}$, $OR=\frac{2u\alpha}{T}$ und $p=\frac{\omega^2}{\alpha}$, weil $\lambda:u=\omega:T$ und $OR:u=2\alpha:T$ ist. Schreibt man nun die Werthe in die obige Gleichung, so erhält man $\frac{u^2\omega^2}{T^2}+\frac{2u\omega^2}{T}=\frac{\omega^2 t}{\alpha}+\frac{2u\omega^2}{T}$ oder $\frac{u^2\omega^2}{T^2}=\frac{\omega^2 t}{\alpha}$ od. $u^2=\frac{tT^2}{\alpha}$; oder $u^2=4ct$ (§.32. N. 3.), oder wenn man $4c=q$ setzt, $u^2=qt$.

1. Zus. Aus der Gleichung $u=\pm\sqrt{qt}$ folgt, daß wie zur Axe, so auch zu jedem Punkte der angenommenen Abscisse, zwei gleiche in entgegengesetzter Richtung liegende Ordinaten gehören. Man nennt daher die mit der Axe parallellaufende Abscissenlinie MR einen Durchmesser der Parabel und bezieht t und q auf dieselbe, eben so als p und x auf die Axe, t ist eine Ordinate, $q=4FM$ der Parameter und M der Scheitelpunkt des Durchmessers MR.

2. Zus. Nimmt man die Abscisse $t=4FM$ an,

so geht die Ordinate durch den Brennpunkt und ist dem halben Parameter gleich.

3. Zus. Der Parameter des Durchmessers q ist $= \frac{u^2}{t}$.

4. Zus. Bei jeder mit der Axe parallellaufenden geraden Linie, finden dieselben Eigenschaften Statt. Daher ist jede zur Axe parallele gerade Linie ein Durchmesser der Parabel, welche die Kurve nur in einem Punkte durchschneidet. Jede andere gerade Linie, welche mit der Axe nicht parallel läuft, wird an zwei Stellen durch die Parabel gehen.

5. Zus. Hieraus folgt nun, daß man vermittelst zweier parallelen Sehnen einen Durchmesser, vermittelst des Durchmessers aber die Axe der Parabel finden könne.

6 Zus. Läßt man aus dem Scheitel M (Fig. 12.) des Durchmessers eine gerade Linie MD senkrecht auf die Ordinate BM′, so ist selbige die größte, welche aus allen Punkten des Bogens BMM′ herabgelassen werden kann; weil jeder andere Punkt des Bogens diesseits der QL, M aber in der Tangente liegt.

7. Zus. Wenn die halbe zum Durchmesser MR gehörige Ordinate in G nochmals halbirt, und zu MO die Parallele GH gezogen wird, bis sie die Parabel in H trifft, so ist MO $= \frac{4}{3}$ HG. Man ziehe

$KH \ddagger OG$, so ist KH eine Ordinate des Durchmessers MR. Es ist aber nach der Zeichnung $KH = OG = \frac{1}{2}OM$ und es verhält sich $MK : MO = KH^2 : M'O^2 = 1 : 4$, folglich $MO - MK : MO = 4 - 1 : 4$, d. i. $KO : MO = 3 : 4$, also ist $MO = \frac{4}{3}KO = \frac{4}{3}HG$.

Zus. 8. Beschreibt man über die Ordinatenlinie M'B ein geradliniges △, dessen Spitze mit dem Scheitel des Durchmessers zusammenfällt, so ist das △ BMM' größer, als die Hälfte des durch die Sehne BM' abgeschnittenen Parabelstückes BMHM'. Denn es ist das Parabelstück BMHM' kleiner, als das aus QB und BM verzeichnete Prlgr. BL.

§. 25. Lehrs. Wird eine Größe F durch eine ganze Zahl n dividirt, so kann man n allemahl so groß annehmen, daß $\frac{F}{n}$ kleiner wird, wie jede gegebene Größe f, wenn sie nur mit F zusammenfällt. Denn so klein f gegen F auch immer seyn mag, so kann man doch f so oft zu sich selbst addiren oder auch kürzer, mit einer so großen Zahl multipliciren, daß die Summe oder das Produkt $nf > F$ wird. Alsdann aber folgt unmittelbar, daß $\frac{F}{n} < f$ seyn muß.

§. 26. Das △ M'MB ist größer als die Hälfte

des Parabelstückes BWMHM′ (§. 25. Zus. 8.). Aus denselben Gründen ist das △ BWM größer als die Hälfte des gleichnahmigen Parabelstückes. Eben so verhält es sich mit den Dreiecken MHM′, BaW. Setzt man nun dieses Verfahren fort und zeichnet in die übrig bleibenden Parabelstücke nach und nach die oben bemerkte Dreiecke ein, so folgt, daß man in ein gegebenes Parabelstück ein Vieleck einzeichnen kann, dessen Unterschied von der Parabel weniger beträgt als jede andere Figur, so klein deren Flächeninhalt auch immer seyn mag.

§. 13. Das größte Dreieck BAC (Fig. 27.) in einem Parabelstück ist 8 Mahl so groß, als das größte Dreieck BDA, welches in den folgenden parabolischen Abschnitt eingezeichnet werden kann.

Bew. Es ist also zu zeigen, daß das △ ABG = 4△BDA sey. Man ziehe die zu D und E gehörige Tangente und Ordinate, so ist, weil AP = EQ = DN = DL = x ist, das △ ANL = 2△ ADL und das △ADL = BDL (§. 54. Ebn. Geom.), folglich △ ADB = 2ADL. Also ist △ LNA = BDA = LAR. Nun ist $AL^2 : AB^2$ = △ALR : △ABG (§. 131. Eb. Geom.), d. i. $1^2 : 2^2$ = △ALR : △ABG, folglich ist das △ABG = 4ALR = 4ADB; oder BAC = 8ADB = 4(ADB + AEC).

Dieser Beweis läßt sich von den in den folgenden Parabelstücken befindlichen Dreiecken eben so führen, d. h. man kann eben so strenge beweisen, daß das △ ABG, 8 mahl so groß sey als das in den genannten Abschnitt, auf die vorhin gezeigte Art eingeschriebene, gleichnahmige Dreieck.

Zus. Da nun die Verzeichnung der Dreiecke, welche so beschaffen sind, daß jedes in ein Parabelstück eingezeichnetes △, 4 mahl größer ist, als die Summe der Flächenräume der beiden größten Dreiecke, welche in den folgenden Abschnitten derselben Parabel eingezeichnet werden können, so entspringt hieraus eine Reihe durch Dreiecke begrenzter Flächenräume, deren jeder vier mahl so groß ist als der folgende. Diese Größen lassen sich daher als eine geometrische Progression vorstellen, worin jedes folgende Glied vier mahl kleiner ist als das vorhergehende. Das erste Glied dieser Progression ist das größte Dreieck eines Parabelstückes $= f$, der Exponent ist $\frac{1}{4}$, folglich die ohne Ende fortgehende Reihe $f + \frac{1}{4}f + \frac{1}{16}f + \frac{1}{64}f \ldots$, deren Summe $S = f\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right)$ $= \frac{4}{3}f$ ist. Da nun die Summe aller Dreiecke den parabolischen Raum F ausfüllet, so ist $F = \frac{4}{3}f$. Beträgt also das größte Dreieck eines Parabelstückes

30 Q. F., so enthält der begrenzte parabolische Raum 40 Q. F.

2. Zus. Soll daher ein Dreieck gezeichnet werden, welches einem gegebenen Parabelstücke gleich ist, so darf man nur die Grundlinie dieses Dreieckes in 3 gleiche Theile theilen, sie auf einer Seite verlängern, die Verlängerung dem dritten Theile der Grundlinie gleich machen und vom Endpunkte nach der Spitze eine gerade Linie ziehen. Dadurch entsteht ein △, welches dem Parabelstücke gleich ist.

3. Zus. Beschreibt man nun um das Parabelstück BDAEC, das Plgr. BSTC, so beträgt das Parabelstück $\frac{2}{3}$ von dem Plgr. BSTC.

4. Zus. Also verhalten sich die parabolischen Räume gegen einander, wie die um sie beschriebenen Parallelogramme. Denn bezeichnet man die Flächenräume der Parabelstücke mit F und f, die Parallelogramme mit P und p, so ist $F:f = \frac{2}{3}P : \frac{2}{3}p = P:p$.

5. Zus. Hieraus folgt, daß sich die Parabelstücke von gleichen Grundlinien, wie ihre Höhen, von gleichen Höhen, wie ihre Grundlinien und von ungleichen Grundlinien und Höhen, wie die Produkte aus den Grundlinien in ihre Höhen, verhalten. Bei gleichen Flächenräumen verhalten sich die Grundlinien der Parabelstücke, umgekehrt wie ihre Höhen ꝛc.

6. Zus. Soll daher ein Parabelstück gezeichnet

werden, welches sich zu einem gegebenen von gleicher Höhe wie 9:5 verhält, so theile man die Grundlinie des letztern in 5 gleiche Theile, trage 9 davon auf eine beliebige gerade Linie, halbire diese und aus der Mitte errichte man einen Perpendikel, welcher der Höhe h der gegebenen Parabel gleich ist. Nimmt man nun den Endpunkt dieser Höhe h zum Scheitel der Parabel, so ist h eine Abscisse, $= x$ und die Hälfte der in 9 gleiche Theile getheilten Linie, die Ordinate y. Hieraus ergiebt sich der Parameter $p = \frac{y^2}{x}$ der Parabel, woraus sich selbige leicht verzeichnen läßt. Beide Parabeln werden sich ihrem Flächeninhalte nach wie ihre Grundlinien verhalten.

§. 28. Aufg. **Den geometrischen Inhalt desjenigen kegelförmigen Körpers, d. i. der Paraboloide, zu berechnen, welcher durch die Umdrehung des Parabelstückes um die Axe entsteht.**

Aufl. Man theile die Axe AB (Fig. 14) bei D, E, F in eine beliebige Anzahl gleicher Theile und ziehe durch alle Theilungspunkte die Parallelen Fp, Eo, Dn ꝛc. zu BC und durch b, e, l, C ꝛc. die Parallelen zu AB, so theilt die Parabel das Ganze in äußere und innere Rechtecke. Drehet man nun die Figur um ihre Axe AB, so beschreiben di

Rechtecke gerade äussere und innere Cylinder, deren Halbmesser der Grundflächen, Ordinaten der Parabel sind. Der Unterschied der Summe der äussern und innern Cylinder wird, der durch das Rechteck ADmn beschriebene Cylinder seyn. Theilt man nun jede Cylinderhöhe AD, DE ꝛc. in zwei gleiche Theile, und wiederholt diese Theilung immer von neuem, so wird, da selbige unbegrenzt fortgesetzt werden kann, der durch An erzeugte Cylinder kleiner werden wie jeder Körper, der sich angeben läßt. Alsdann aber ist der Unterschied zwischen der Paraboloide und den äussern oder innern Cylinder kleiner, als der Unterschied zwischen der Summe der äussern und innern Cylinder.

Nun verhalten sich die, durch die Rechtecke Ab, De, Ef ꝛc. beschriebenen, gleich hohen Cylinder, wie $Db^2 : Ee^2 : FC^2 = AD : AE : AF$ (§. 42. 3 1. Krpl.) $=$ $1 : 2 : 3$ ꝛc. Daher bildet die Summe aller um den parabol. Raum beschriebenen Cylinder eine arithmetische Progression, deren Glieder durch 1, 2, 3, 4 . . . . oder 0, 1, 2, 3, 4 ꝛc. vorgestellt werden. Diese Summe wird gefunden, wenn man das letzte Glied, d. h. den durch das Rechteck FC beschriebenen Cylinder, durch die halbe Anzahl der Glieder, d. i. mit der halben Höhe AB, multiplicirt. Also ist die Paraboloide die Hälfte eines Cylinders, welcher mit je-

ner auf gleicher Grundfläche steht und dieselbe Höhe hat. Ist z. B. AB = x = 3,4′ und BC = y = 2,8′, so ist der körperliche Inhalt der Paraboloide K = $\frac{1}{2}xy^2\pi = 1{,}7 \cdot 2{,}8^2 \cdot 3{,}14159 = 41{,}871111$ C. F.

II. Abschnitt.
Von der Ellipse.

§. 29. Es ist oben gezeigt worden, wie die krummen Linien der zweiten Ordnung, welche man unter dem Nahmen der Kegelschnitte begreift, entstanden und unter einer allgemeinen Gleichung enthalten sind. Sondert man nun bei der Ellipse die beständigen Größen von den veränderlichen, wie solches bei der Parabel geschehen ist, ab, so kann man die Gleichung der Ellipse auch auf eine sehr einfache Gestalt zurückführen. Zur Entdeckung ihrer Eigenschaften kann man ihre Gleichungen auf mancherlei Formen bringen, welche durch die Annahme des Anfangspunktes der Absciſſen, durch die Lage der Axen, durch die Verbindung der Ordinaten 2c. veranlaßt werden.

§ 30. Zeichnet man nun jenen Kegelschnitt, welcher entsteht, wenn die schneidende Ebene durch beide Seiten des Axendreieckes geführt wird, so wird dadurch ein Theil des Raumes völlig begrenzt und die Durchschnittslinie AZ (Fig. 15.) des gedachten △ mit der schneidenden Ebene heißt die große Axe, die Endpunkte A und Z ihre Scheitelpunkte, die Mitte C der Mit-

telpunkt der Ellipse. Zieht man nun durch den Mittelpunkt C eine gerade Linie senkrecht bis an den Umfang der Figur, so heißt diese Linie DE die kleine Axe, welche wir mit b bezeichnen wollen.

§. 31. Nimmt man nun die (§. 10.) gefundene Gleichung $y^2 = \frac{\sin\beta}{\cos\frac{1}{2}\alpha^2}[ex\sin\alpha \mp x^2\sin(\alpha+\beta)]$; hier $y^2 = \frac{\sin\beta}{\cos\frac{1}{2}\alpha^2}[ex\sin\alpha - x^2\sin(\alpha+\beta)] = \frac{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}\alpha^2}\left(\frac{ex\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} - x^2\right)$, wo $\frac{e\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$ $= a$ der großen Axe ist, so finden wir $y^2 = \frac{\sin\beta\sin(a+\beta)}{\cos\frac{1}{2}\alpha^2}(ax - x^2)$. Aus dieser Gleichung folgt, daß der veränderliche Faktor $ax - x^2 = (a-x)x$ ist, und daß also x weder negativ noch größer als x werden kann; folglich dehnet sich die Ellipse nicht über ihre beiden Scheitelpunkte aus. So viel aber läßt sich aus dieser Gleichung noch ersehen, daß $a-x$ desto kleiner wird, je größer x wird. Dieses Produkt nimmt so lange zu, bis $x = \frac{1}{2}a$ wird. In diesem Falle wird $y^2 = \frac{a^2\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}{4\cos\frac{1}{2}\alpha^2}$ und $y = \pm\frac{a}{2\cos\frac{1}{2}\alpha}\sqrt{[\sin\beta\sin(\alpha+\beta)]} = \frac{1}{2}b$. Bestimmt man hiernach y^2, so wird dieser Werth, $= \frac{b^2}{a^2}(ax - x^2)$

$= \frac{b^2x}{a} - \frac{b^2x^2}{a^2}$, eine Gleichung der Ellipse aus den beiden Axen, so daß die Abscissen vom Scheitelpunkte an gerechnet werden. Sollten a und b die halben Axen bezeichnen, so ist $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$.

Diese Gleichung kann nun dazu dienen, die angeführten Eigenschaften der Ellipse zu bestätigen und die Betrachtungen darüber weiter fortzusetzen.

1. Zus. Ist nun $x = 0$, so ist $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{(a0 - 0)}$, d. h. wo $x = 0$ ist, da muß y verschwinden und mit x in einen Punkt zusammenfallen oder die Linie, welche durch die unzählige Punkte wie M bestimmt wird, kann sich an dieser Stelle nicht über die Axe AX erheben, sondern muß durch selbige durchgehen. Ist aber $x = a$, so ist $y = \frac{b}{a} \sqrt{(aa - aa)} = 0$, d. h. hier ist die Grenze aller möglichen Werthe und y verschwindet zum zweiten Mahle da, wo $x = a$ ist.

2. Zus. Setzt man in den obigen Ausdruck $x = \frac{1}{2}a$ oder $x < \frac{1}{2}a$ oder $x > \frac{1}{2}a$; so wird y im ersten Falle größer, als in den beiden andern Fällen. Denn ist $x = \frac{1}{2}a$, so ist $ax = \frac{1}{2}a^2$ und $x^2 = \frac{1}{4}a^2$, folglich $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{b^2}{4}$. Ist aber $x < \frac{1}{2}a$, so nehme man

$x + k = \frac{1}{2}a$, also $x = \frac{1}{2}a - k$ und k bezeichnet das Stück, um welches $x > \frac{1}{2}a$ ist. Alsdann ist $ax = \frac{1}{2}a^2 - ak$ und $x^2 = \frac{1}{4}a^2 - ak + k$, folglich $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot (\frac{1}{2}a^2 - ak - \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}ak - k^2) = \frac{b^2}{a^2}(\frac{1}{4}a^2 - k^2)$.

Ist $x > \frac{1}{2}a$, so sey $x = \frac{1}{2}a + k$ und k bezeichnet das Stück, um welches $x > \frac{1}{2}a$ ist. Alsdann ist $ax = \frac{1}{2}a^2 + ak$ und $x^2 = \frac{1}{4}a^2 + ak + k^2$, folglich $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{1}{2}a^2 + ak - \frac{1}{4}a^2 - ak - k) = \frac{b^2}{a^2} \cdot (\frac{1}{4}a^2 - k^2)$.

Es ist also y am größten, wenn $x = \frac{1}{2}a$ und y wird kleiner, man mag für x größere oder kleinere Werthe, als $\frac{1}{2}a$ ist, annehmen. Kurz y hat bei $\frac{1}{2}a$ die Grenze erreicht, welche sie nicht überschreiten und bei jedem andern Werthe von x nicht einmahl erreichen kann und die gefundenen Ausdrücke zeigen, daß y bei den um gleich viel über $\frac{1}{2}a$ wachsenden und darunter abnehmenden Werthen einerlei Größe hat.

3. Zus. Soll man nun nach den aus der Gl. $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{(ax - x^2)}$ gefundenen Eigenschaften, die dazu gehörige Linie beschreiben, so kann man von ihr sagen, sie ist eine krumme, in sich selbst laufende Linie, welche sich von dem einen Durchschnittspunkte immer mehr und mehr über die Axe erhebt, eine gewisse Höhe erreicht, von welcher an sie immer weiter

wieder zu ihr hinabsinkt, bis sie in den andern Durchschnittspunkt kommt und nun dieselbe Richtung unter der Axe nimmt, wie vorher über ihr, folglich durch selbige in zwei gleiche und ähnliche Hälften getheilt wird.

4. Zus. Ist in einer Ellipse die große Axe, der kleinen oder zugeordneten gleich, so wird in der obigen Gleichung $a = b$, folglich ist $y^2 = \frac{b_2}{a^2}(ax - x^2)$ in diesem Falle $= ax - x^2$, d. i. eine Gleichung für den Kreis, dessen Durchmesser $= a$ ist.

5. Zus. Nimmt man nun zwei beliebige Ordinaten, $FG = y$, $CD = Y$, wozu die Abscissen $AF = x$ und $AC = X$ gehören, auf der Axe an, so verhalten sich deren Quadrate wie die Rechtecke aus den Abschnitten der Axe. Denn es ist für die erste Stelle $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(ax - x^2)$, für die andere $Y^2 = \frac{b^2}{a^2}(aX\text{-}X^2)$ folglich verhält sich $y^2 : Y^2 = ax - x^2 : aX - X^2 = (a - x)x : (a - X)X$, d. i. nach der Figur $FG^2 : CD^2 = AF.FZ : AC.CZ$.

§. 32. Sucht man zu den beiden Axen die 3te geometrische Proportionalgröße $p = \frac{b}{a}$, so heißt selbige der Parameter der großen Axe oder der Parameter der Ellipse.

§. 33. Aufg. Eine Gleichung für die Ellipse aus der großen Axe und dem Parameter zu finden.

Aufl. Es ist $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(ax - x^2) = \frac{b^2x}{a} - \frac{b^2x^2}{a}$.
Nun ist $p = \frac{b^2}{a}$ oder $b^2 = ap$ und $b = \sqrt{ap}$. Schreibt man nun diese Werthe für b^2, so ist $y^2 = px - \frac{p^2x^2}{a}$.

Zus. Setzt man, wie im 4ten Zus. des 32. §.) $a = b$, so entsteht aus der allgemeinen Gleichung für die Ellipse, die besondere Gleichung für den Kreis und es ist in diesem Falle nach (§. 32.) $p = \frac{b^2}{a} = a$. Daher läßt sich der Kreis als eine Ellipse betrachten, deren Parameter, große und kleine Axe von gleicher Größe sind.

§. 34. Aufg. Eine Gleichung für die Ellipse zu finden, wenn die Abscissen von dem Mittelpunkte der großen Axe an, gerechnet werden.

Aufl. Es sey (Fig. 15.) C die Mitte von a, und $CP = u = CA - AP = \frac{1}{2}a - x$, folglich $x = \frac{1}{2}a - u$ und $x^2 = \frac{1}{4}a^2 - au + u^2$. Nun lege man aus (§. 31.) die Gleichung $y^2 = \frac{b^2x}{a} - \frac{b^2x^2}{a^2}$ zum

Grunde. Schreibt man nun für x und x^{I} die vorhin angegebenen Werthe, so ist $y^2 = \frac{b^2}{2} - \frac{b^2u}{a^2} - \frac{b^2}{4} + \frac{b^2u}{a} - \frac{b^2u}{a^2} = \frac{1}{4}b^2 - \frac{b^2u^2}{a^2}$. Durch diese Gleichung erhalten die in (§. 32 rc. Z. 3.) angeführten Eigenschaften der Ellipse von neuem ihre Bestätigung.

§. 35. Im Allgemeinen liegt bei einer jeden krummen Linie in der Axe da ein Brennpunkt, wo die Ordinate dem halben Parameter gleich ist und es entsteht demnach die Frage, ob auch die Ellipse einen oder mehrere Brennpunkte habe oder nicht. Diese Frage ist mit derjenigen einerlei, ob man in der Haupttaxe der Ellipse einen oder mehrere Punkte annehmen könne, in welchen die Ordinaten senkrecht errichtet, dem halben Parameter gleich sind. Diese Frage läßt sich dadurch entscheiden, daß man untersucht, ob mögliche oder unmögliche Werthe entstehen, wenn man die Ordinate $= \frac{1}{2}p$ setzt. Ist das erstere, so fällt sie bejahend, ist aber das letztere, verneinend aus. Sucht man nun die Entfernung dieser Puncte vom Scheitel, so nimmt man bei dieser Bestimmung die Gleichung aus (§. 31.) an; sucht man aber ihren Abstand vom Mittelpunkte, so benutzt man dazu die in (§. 34.) gefundene Gleichung. Daher nehme

man $y^2 = \frac{1}{4}b^2 - \frac{b^2}{a^2}u^2$ nach (§. 34.). Nun setze man für $y = \frac{1}{2}p = \frac{b^2}{2a}$ oder $y^2 = \frac{b^4}{4a^2}$, folglich ist $\frac{b^4}{4a^2} = \frac{1}{4}b^2 - \frac{b^2}{a^2}u^2$ oder $\frac{b^2}{a^2}u = \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{4}\frac{b^4}{a^2}$ oder $b^2u^2 = \frac{1}{4}a^2b^2 - \frac{1}{4}b^4$ oder $u^2 = \frac{a^2 - b^2}{4}$, folglich $u = \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - b^2)}$. Daher gibt es in einer Ellipse, deren Hauptaxe größer als die zugeordnete Axe ist, von dem Mittelpunkte C in der Entfernung u zwei Brennpunkte F und f, die eine entgegengesetzte Lage haben.

§. 36. Diese Entfernungen CF, Cf der Brennpunkte von dem Mittelpunkte nennt man die Eccentricität der Ellipse, welche wir in der Folge mit e $= \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - b^2)}$ bezeichnen wollen. Daher ist $\frac{1}{4}e^2 = \frac{1}{4}(a^2 - c^2)$ oder $e^2 = \frac{\frac{1}{4}a^2 - c^2}{4}$, d. h. das Quadrat der Entfernung des Brennpunktes vom Mittelpunkte C, ist dem vierten Theile von der Differenz der Quadrate der beiden Axen gleich.

Zus. Will man nun die Entfernung der Brennpunkte vom Scheitelpunkte angeben, so darf man nur bemerken, daß in diesem Falle AF $= \frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - b^2)} = \frac{a \pm \sqrt{(a^2 - b^2)}}{2}$ ist.

§. 37.

§. 37. Parabel und Ellipse, die nach einem und demselben Parameter verzeichnet sind, unterscheiden sich von einander desto weniger, je größer die Hauptaxe der Ellipse ist.

Bew. Beide Linien werden durch die Ordinaten bestimmt. In der Parabel ist $y^2 = px$ (§. 13.) in der Ellipse, $= px - \frac{px^2}{a}$. Beiderlei Ordinaten unterscheiden sich dadurch, daß in der Ellipse von jedem Rechteck noch ein Stück $= \frac{px^2}{a}$ abgezogen werden muß. Dieses Stück ist ein Bruch, der desto kleiner ausfällt, je größer der Nenner a ist. Wächst nun dieser Nenner immer fort, so wird das Stück immer kleiner und muß endlich als o anzusehen seyn, wenn a über alle Grenzen hinausgeht, d. h. wenn $a = \infty$ wird. Dadurch läßt sich nun der Ausdruck rechtfertigen, die Parabel ist als eine Ellipse von unendlicher Axe anzusehen.

§. 38. Die Summe der Entfernungen (Fig. 15.) eines jeden Punktes der Ellipse von den beiden Brennpunkten, ist der großen Axe a gleich.

Bew. Man lasse aus M auf AZ die gerade Linie PM senkrecht herab, so ist, wenn P zwischen F und C fällt,

$FM^2 = FP^2 + PM^2 = (CF - CP)^2 + PM^2$, d. i.

$= (e-u)^2 + y^2 = (e-u)^2 + \frac{1}{4}b^2 - \frac{b^2}{a^2}u^2$.

Schreibt man in diese Gleichunng für e den gefundenen Werth, so erhält man

$$FM^2 = [\tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2-u^2)}-u]^2 + \tfrac{1}{4}b^2 - \frac{b^2}{a^2}u^2.$$

$$= \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} - u\sqrt{(a^2-b^2)} + u^2 + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{a^2}u^2$$

$$= \tfrac{1}{4}a^2 - u\sqrt{(a^2-b^2)} + \frac{a^2-b^2}{a^2}u^2.$$ Es läßt sich nun leicht übersehen, daß diese dreitheilige Größe ein vollständiges Quadrat bezeichnet. Daher ist FM $= \frac{1}{2}a - \frac{u\sqrt{(a^2-b^2)}}{a}$. Nimmt man nun das Quadrat der Entfernungen Mf, so findet hier dieselbe Entwickelung Statt; nur ist $fM = (Cf + CP)^2 + PM^2$, d. h. das Stück CP, welches vorhin abgezogen werden mußte, wird hier zu Cf hinzugefügt. Hieraus erhält man $Mf = \frac{1}{2}a + \frac{u\sqrt{(a^2-b^2)}}{a}$, folglich gibt MF + Mf die große Axe a.

Zus. Je näher die Brennpunkte F und f dem Mittelpunkte C liegen, desto kleiner wird die Eccentricität und die Ellipse nähert sich dem Kreise. Fallen F, f und C zusammen, so entsteht aus derselben, der Kreis.

§. 39. Aufg. Eine Ellipse zu verzeichnen, deren Brennpunkte auf der Hauptaxe gegeben sind.

Aufl. Man ziehe (Fig. 15.) durch beliebige Punkte der Axe senkrechte Linien, mache in jede derselben oben und unten Einschnitte von dem einem Brennpunkte F mit der Eröffnung des Zirkels von A und dem Durchschnittspunkte eines jeden Perpendikels mit der Axe. Jeden dieser Bogen durchschneide man aus dem andern Brennpunkte und zwar mit der Eröffnung des Zirkels von demselben Durchschnittspunkte bis zum andern Brennpunkte der Axe; so liegt nach (§. 38.) jeder Durchschnittspunkt eines solchen Perpendikels in der Ellipse, welche man durch diese Punkte ziehen kann.

1. Zus. Liegt demnach der Punkt M in der krummen Linie, so ist die Summe der Entfernungen desselben, von den beiden Brennpunkten der großen Axe gleich; liegt der Punkt aber innerhalb oder ausserhalb der Ellipse, so ist die Summe der gedachten Entfernungen im ersten Falle kleiner, im andern größer als die große Axe.

2. Zus. Die halbe große und kleine Axe und die Eccentricität sind 3 Größen, welche in einer solchen Verbindung mit einander stehen, daß aus zwei die dritte allemahl gefunden werden kann.

5. Zus. Die beiden Brennpunkte F und f sind von dem Mittelpunkte gleich weit entfernt.

§. 40. **Aufg.** **Eine Gleichung für die Ellipse aus dem Mittelpunkte zu finden, wenn die Abscissen auf der kleinen Axe angenommen werden.**

Aufl. Aus (§. 38.) erhält man $y^2 = \frac{b}{4} - \frac{b^2u^2}{a^2}$, wo a und b die große und kleine Axe bezeichnen, folglich ist $\frac{b^2u^2}{a^2} = \frac{b^2}{4} - y^2$, also $u^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2y^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2}(\frac{1}{4}a^2 - y^2)$. Nun ziehe man durch M die ML zu AC parallel, so ist CL = PM = y und LM = CP = u, folglich ist CL eine Abscisse, die vom Mittelpunkte aus, auf der kleinern Axe angenommen worden ist. Hieraus läßt sich nun übersehen, daß die Gleichung dieselbe Gestalt behält, wenn gleich die Coordinaten verwechselt werden.

Zus. Nimmt man nun DL = CD — CL oder $x' = \frac{1}{2}b - y$ an, so ist $y = \frac{1}{2}b - x'$ und $y^2 = \frac{1}{4}b^2 - bx' + x'x'$ und die vorhin gefundene Gleichung wird $u^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} + \frac{a^2x'}{b} - \frac{a^2x'x'}{b^2} = \frac{a^2x'}{b} - \frac{a^2x'^2}{b^2}$. Sucht man nun zu b und a die dritte

geometrische Proportionalgröße und setzt diese $= q$, so, daß $b : a = a : q$, folglich $q = \frac{a^2}{b}$ ist, so kann diese Größe der Parameter der kleinen Axe genennt und in die Rechnung eingeführt werden, und $u^2 = qx' - \frac{qx'^2}{b}$ ist eine Gleichung für die Ellipse, wo die Abscissen vom Scheitelpunkt der kleinen Axe an, gerechnet werden.

§. 41. Aufg. Eine Gleichung für die Ellipse zu finden, wenn die Ordinaten unter dem gegebenen Winkel α in einen Brennpunkt f zusammen treffen.

Aufl. Man nenne den Winkel, welchen die beiden Linien fM und Pf am Brennpunkte f einschließen, d. i. $FfM = \alpha$, $fM = z$, die halbe Axe $AC = a$ setzet, so erhält man, weil $fF = 2e$ ist, $FM^2 = z^2 - 4ez \cos\alpha + 4e^2$ (Trigonom. §. 32.). Allein nach (§ 38.) ist $FM + fM = 2a$; folglich ist $\sqrt{(z^2 - 4ez \cos\alpha + 4e^2)} = FM = 2a - z$ oder $z^2 - 4ez \cos\alpha + 4e^2 = (2a - z)^2 = 4a^2 - 4az + z^2$. Hieraus folgt, daß $az + ez \cos\alpha = a^2 - e^2 = b^2$; oder daß $z(a - e \cos\alpha) = b^2$, folglich $z = \frac{b^2}{a - e \cos\alpha}$

$$= \frac{b^2}{a - \cos\alpha \sqrt{(a^2 - b^2)}}.$$

Zus. Es ist aber $\cos\alpha = \frac{Pf}{z} = \frac{u+e}{z}$. Daher findet man aus der obigen Gleichung $az - \frac{ez(e+u)}{z} = b^2$ oder $az - e^2 - eu = b^2$ oder $az = b^2 + e^2 + eu = a^2 + eu$, folglich $z = a + \frac{eu}{a}$. Da nun $FM = 2a - z$ und $z = a + \frac{eu}{a}$ ist, so erhält man $FM = a - \frac{eu}{a}$.

§. 42. Aufg. Die Gleichung für die Ellipse so zu verändern, daß die Ordinaten in den Mittelpunkten C zusammen laufen.

Aufl. Man setze $ACM = \alpha$ und $CM = z$, so ist $y = z \sin\alpha$ und $u = z \cos\alpha$, und wenn man diese Werthe in die (§. 34.) gefundene Gleichung schreibt, so erhält man $z^2 \sin\alpha^2 = b^2 - \frac{b^2 z^2}{a^2} \cos\alpha^2$ oder $z^2 \sin\alpha^2 + \frac{b^2 z^2 \cos\alpha^2}{a^2} = b^2$, $z^2 a^2 \sin\alpha^2 + z^2 b^2 \cos\alpha^2 = a^2 b^2$, folglich ist $z^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin\alpha^2 + b^2 \cos\alpha^2}$.

§. 43. Aufg. An einen gegebenen Punkt der Ellipse eine Tangente, d. h. eine gerade Linie zu ziehen, welche auch hier die oben (§. 19.) bemerkten Eigenschaften hat.

Aufl. Man ziehe (Fig. 16.) aus dem einen Brennpunkte F nach dem gegebenen Punkte M in der Ellipse die gerade Linie FM und aus dem andern die gerade Linie fM, verlängere fM über M hinaus, und zwar so weit, daß der verlängerte Theil FG = FM werde und theile den Winkel GMF in zwei gleiche Theile, so wird die Theilungslinie TM die verlangte Tangente seyn.

Bew. Ausser M hat die gerade Linie TN keinen Punkt weiter mit der Ellipse gemein. Denn gäbe es noch einen zweiten Punkt N, welcher wie M in der geraden Linie TN und in der Ellipse läge, so würden alsdann folgende Verhältnisse Statt finden. Die beiden rechtwinkligen Dreiecke GMK und FMK sind nach der Construction einander gleich und ähnlich; also ist MF = MG; MN = MN und GMN = FMN, weil die Winkel, welche die genannten als Nebenwinkel zu 2R ergänzen, einander gleich sind. Folglich ist GN = FN. Es ist aber GN + Nf > Gf also auch FN + Nf > FM + Mf. Daher kann auch N kein Punkt der Ellipse seyn.

1. Zus. Da MKG = MKF = R ist, so stehet die Verbindungslinie FG auf der Tangente allemahl senkrecht.

2. Zus. In jeder Ellipse schließen die beiden Linien, d. i. FM und fM mit der Tangente TM

gleiche Winkel ein. Denn KMG und NMf sind Verticalwinkel, folglich einander gleich. GMK und KMF sind vermöge der Zeichnung einander gleich und daraus folgt die Gleichheit der Winkel KMF und NMF.

3. Zus. Soll durch einen gegebenen Punkt P′ (Fig. 10.) ausserhalb der Ellipse an selbige eine Tangente gezogen werden, so beschreibe man aus P′ mit dem Abstande des Punktes P′ vom Brennpunkte als mit dem Halbmesser P′F einen Kreisbogen FG, durchschneide diesen Bogen aus dem andern Brennpunkte f mit dem Halbmesser fG=AB, verbinde f und G durch die gerade Linie FG und ziehe von P′ nach dem Durchschnittspunkte H die gerade Linie P′H, so wird diese Linie die verlangte Tangente seyn. Denn es ist P′F=P′G; HF=HG, folglich ist GF senkrecht auf P′H und FHP′=GHP.′

Erkl. Errichtet man aus dem Berührungspunkte der Tangente (Fig. 16.) die senkrechte Linie MQ bis Af, so heißt hier in einem ähnlichen Sinne wie bei der Parabel MQ die Normale, TP die Subtangente und PQ die Subnormale der Ellipse für den Punkt M.

§. 44. Aufg. Die Subnormale, die Normale, Subtangente und Tangente für

jeden gegebenen Punkt der Ellipse zu bestimmen.

Aufl. Es ist 1) die Subnormale $PQ = \frac{b^2u^2}{a^2}$. Denn nach der Zeichnung ist FG ‡ MQ, folglich ist das △ GFf ∽ MQf, also ist fG : fF = fM : fQ. Es ist aber fG = fM + MF = 2a; fF = 2e; fM = $a + \frac{eu}{a}$ (§. 41. Zus.); daher verhält sich: 2a : 2e = $a + \frac{eu}{a}$: fQ, folglich ist $fQ = e + \frac{e^2u}{a^2}$. Die Subnormale PQ aber ist, = fP − fQ und fP = e + u, folglich $PQ = u - \frac{e^2u}{a^2} = \frac{(a^2 - e^2)u}{a^2} = \frac{b^2u}{a^2}$.

2) Die Subtangente TP ist $= \frac{a^2 - u^2}{u}$. Denn es verhält sich TP : PM = PM : PQ, folglich $PQ = \frac{PM^2}{TP} = \frac{a^2 - u^2}{u}$.

3) Ist die Normale $MQ = \sqrt{(PM^2 + PQ^2)}$. Es ist aber $PM^2 = y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - u^2)$ und $PQ^2 = \frac{b^4}{a^4}u^2$, folglich $PM^2 + PQ^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^4}u^2a^2 + \frac{b^4}{a^4}u^2 = b^2 - \frac{b^2u^2}{a^4}(a^2 - b^2)$; also MQ =

$$\sqrt{\left(b^2 - \frac{b^2u^2}{a^4}(a^2 - b^2)\right)} = b\sqrt{\left(1 - \frac{e^2u^2}{a^4}\right)}.$$

4) Ist die Tangente $TM = \sqrt{(TP^2 + PM^2)}$.
Es ist aber $PT = \frac{a^2 - u^2}{u}$ nach (Nr. 2.) und $PT^2 =$
$\left(\frac{a^2 - u^2}{u}\right)^2 = \frac{y^4 a^4}{b^4 u^2}$, folgl. $TP^2 + PM^2 = \frac{y^4 a^4}{b^4 u^2} + y^2$
$\frac{y^2(a^4 v^2 + b^4 u^2)}{b^4 u^2}$ also $TM^2 = \frac{y^2[a^2(a^2 - u^2) + b^2 u^2]}{b^2 u^2}$
$= \frac{y^2[a^4 + (b^2 - a^2)u^2]}{b^2 u^2}$. Daher findet man TM
$= \frac{y\sqrt{a^4 + (b^2 - a^2)u^2}}{bu}$ oder $= \frac{y\sqrt{[a^4 - (a^2 - b^2)u^2]}}{bu}$
$= \frac{y\sqrt{(a^4 - e^2 u^2)}}{bu}$. Also findet man für jeden gegebenen Punkt der Ellipse nach den angegebenen Bedingungen:

1) die Subnormale $PQ = u - \frac{e^2 u^2}{a^2} = \frac{u^2(a^2 - e^2)}{a^2} = \frac{u^2 b^2}{a^2}$.

2) die Subtangente $TP = \frac{a^2 - u^2}{u}$.

3) die Normale $MQ = b\sqrt{\left(1 - \frac{e^2 u^2}{a^2}\right)}$, und

4) die Tangente $TM = \frac{y\sqrt{(a^2 - e^2 u^2)}}{bu}$.

1. Zus. Nimmt man bei der Subtangente $u = 0$ an, so wird $PT = \infty$; nimmt man $u = a$ an, so wird $PT = 0$. Jener Ausdruck gibt zu erkennen,

daß die durch den Scheitelpunkt der kleinen Axe geführte Tangente, der großen Axe parallel, diese, daß die Tangente vom Scheitelpunkt der großen Axe, auf derselben senkrecht sey.

2. Zus. Da $PT = \frac{a^2 - u^2}{u}$ ist, so findet man

$$CT = PT + PC = u + \frac{a^2 - u^2}{u} = \frac{a^2}{u}.$$

3. Zus. Das Stück AT aber ist $= CT - CA$ $= \frac{a^2}{u} - a = \frac{a^2 - au}{u}$.

4. Zus. Es ist oben $TM = \frac{y\sqrt{[(a^2 + eu).(a^2 - eu)]}}{bu}$ (Fig. 16.) gefunden worden; ferner ist $FT = CT - CF$ und $fT = CT + Cf$ oder $FT = \frac{a^2}{u} - e$ (Zus. 2.) und $fT = \frac{a^2}{u} + e$, folglich ist $TM = \frac{y}{b}\sqrt{FT.fT}$.

5. Zus. So wie oben die von 1 bis 4 genannten Linien für jede Absciſſe auf der großen Axe gefunden worden sind, so lassen sich dieselben auch für jede Absciſſe auf der kleinen Axe bestimmen.

6. Zus. Die Normallinie theilt den W. FMf (Fig. 16.) in zwei gleiche Theile. Denn es ist FMK = KFM und QMf = MGK, nun ist KGM = KFM, folglich auch FMQ = fMQ.

Zus. 7. Hieraus ersiehet man, daß man um an einem gegebenen Punkt der Ellipse eine Tangente zu ziehen, nur nöthig hat, zwei gerade Linien aus den Brennpunkten nach diesem Punkte zu ziehen und den äussern Winkel zu halbiren. Die Theilungslinie ist, weil sie auf der Normale senkrecht steht, die verlangte Tangente.

§. 45. Erkl. Jede durch den Mittelpunkt der Ellipse C gehende gerade Linie, welche zu beiden Seiten bis an deren Umfang ausgezogen worden ist, heißt ein Durchmesser und ihre in die Ellipse fallenden Punkte, die Scheitel desselben. Zwei Durchmesser, welche so beschaffen sind, daß gegenseitig jeder, alle mit dem andern parallel laufende gerade Linien in der Ellipse halbirt, heißen zugeordnete Durchmesser. Jede der genannten vom Durchmesser halbirten geraden Linien, eine diesem Durchmesser zugehörige Ordinate und das von demselben abgeschnittene Stück, die mit der Ordinate zusammen gehörige Absciſſe. Jede Größe, welche zu zwei zusammen gehörigen Durchmessern, die dritte geometrische Proportionalgröße ist, wird der Parameter des ersten Durchmessers genannt.

Zus. Also ist das Produkt zweier zugeordneten Durchmesser, allemahl dem Produkte ihrer Parameter gleich. Denn sind die beiden Durchmesser a und

b, ihre Parameter α und β, so ist $a:b=b:\alpha$ und $b:a=a:\beta$, folglich $\alpha=\frac{b^2}{a}$ und $\beta=\frac{a^2}{b}$, also $\alpha\beta=ab$.

§. 46. Die Summe der Quadrate der beiden Axen ist in der Ell: der Summe der Quadrate zweier zugeordneten Durchmesser gleich.

Bew. Man ziehe einen beliebigen Durchmesser $GH=2f$ (Fig. 17), an G die Tangente GT, durch C die $CL=g \ddagger GT$ und setze die halbe große Axe $AC=BC=a$, die halbe kleine Axe $CD=CE=b$, lasse PG und QL senkrecht auf AB herab und setze $CP=u$, so sind die Dreiecke CQL und TPG einander ähnlich. Daher verhält sich $TP^2:CQ^2=PG^2:QL^2$ oder nach (§. 43. Nr. 3.)

$$\left(\frac{a^2-u^2}{u}\right)^2:CQ^2=y^2:\frac{b^2}{a^2}(a^2-CQ^2) \text{ oder}$$

$$\left(\frac{a^2-u^2}{u}\right)^2:CQ^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-u^2):\frac{b^2}{a^2}(a^2-CQ^2) \text{ oder}$$

$$a^2-u^2:CQ^2=u^2:a^2-CQ^2$$

$$a^2:a^2=u^2:a^2-CQ^2, \text{ folglich ist}$$

$$u^2=a^2-CQ^2 \text{ oder } a^2=u^2+CQ^2=CP^2+CQ^2$$

und $QL^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-CQ^2)=\frac{b^2u^2}{a^2}$. Endlich ist

$$CG^2=CP^2+PG^2 \text{ und } CL^2=CQ^2+QL^2 \text{ oder}$$

$$f^2=u^2+b^2-\frac{b^2u^2}{a^2} \text{ und } g^2=a^2-u^2+\frac{b^2u^2}{a^2};$$

also ist $f^2 + g^2 = a^2 + b^2$; oder $HG^2 + KL^2 = AB^2 + DE^2$.

§. 47. Das Produkt aus den beiden Axen ist in der Ellipse dem Produkte zweier zugeordneten Durchmesser, welches mit dem Sinus ihres Neigungswinkels multiplicirt ist, gleich.

Bew. Es ist $\triangle$ CKN $\backsim$ GTP, folglich verhält sich $PT^2 : PG^2 = CN^2 : KN^2$, $PG^2 : PT^2 = KN^2 : CN^2$ d. i. $\frac{b^2}{a^2}(a^2 - CP^2) : \frac{(a^2 - CP^2)^2}{CP^2} = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - CN^2) : CN^2$. Hieraus folgt $CN^2 = a^2 - CP^2$. Nun ist der Flächeninhalt des $\triangle\ KCG = \frac{1}{2}(KN + PG) . (NC + CP) - \frac{1}{2}KN . CN - \frac{1}{2}CP . GP = \frac{1}{2}PG . NC + \frac{1}{2}KN . CP$. Nun ist aber $\frac{1}{2}PG . NC = \frac{b}{2a}\sqrt{(a^2 - CP^2)} . \sqrt{(a^2 - CP^2)} = \frac{1}{3}ab - \frac{CP^2}{2a}$ und $\frac{1}{2}KN . CP = \frac{b}{2a} . CP^2$; folglich das $\triangle\ KCG = \frac{1}{2}ab$. Der Flächeninhalt dieses $\triangle$ KCG aber ist auch $= \frac{1}{2}fg \sin KCG$ (Trig. §. 33.). Setzt man nun KCG $= \varphi$, so folgt, daß $\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}fg\sin\varphi$ oder $ab = fg\sin\varphi$ sey.

Zus. Es ist das $\triangle\ KCG = \frac{1}{2}ab$, folglich das Prlgr. CKMG $= ab$ und das Plgr. MO $= 2a . 2b$,

d. h. das um die Ellipse aus den zugeordneten Durchmessern beschriebene Parallelogramm ist dem Rechteck aus den beiden Axen gleich.

Zus. 2. Es ist $a^2+b^2=f^2+g^2$ (§. 45.) und $ab=fg\sin\varphi$, folglich

$a^2+2ab+b^2=f^2+2fg\sin\varphi+g^2$ und

$a^2-2ab+b^2=f^2-2fg\sin\varphi+g^2$, folglich

$a+b=\sqrt{(f^2+2fg\sin\varphi+g^2)}=\sqrt{m}$

$a-b=\sqrt{(f^2-2fg\sin\varphi+g^2)}=\sqrt{n}$ also

$a=\frac{1}{2}(\sqrt{m}+\sqrt{n})$ und $b=\frac{1}{2}(\sqrt{m}-\sqrt{n})$. Auf diese Art kann man aus zwei zugeordneten Durchmessern und ihrem Neigungswinkel die beiden großen Axen finden und daraus die Ellipse beschreiben. Würden die Axen gegeben seyn, so könnte man auf eine ähnliche Art, die zugeordneten Durchmesser finden, welche einen gegebenen Winkel einschließen.

Zus. 3. Setzt man den W. GCT, welcher durch die halbe Axe und den halben Durchmesser gebildet wird, $=\psi$, so läßt sich derselbe aus dem halben Durchmesser, der halben großen Axe und dem Neigungswinkel zweier zugeordneten Durchmesser leicht bestimmen. Denn im △ CGT verhält sich CT : CG $=\sin CGT : \sin CTG$. Es ist aber $\sin CTG = \sin TCL = \sin(GCL - TCG)$ oder wenn man GCL $=\varphi$ setzt, $=\sin(\varphi-\psi)$; $\sin CGT = \sin GCL =$

$\sin\varphi$; $CG = f$; $CT = \frac{a^2}{CP}$, folglich $\frac{a^2}{CP} : \sin\varphi = f :$ $\sin(\varphi - \psi)$, also $CP = \frac{a^2 \sin(\varphi - \psi)}{f \sin\varphi}$. Auch verhält sich im $\triangle$ CPG, $\sin.\text{tot} : \sin CGP = CG : CP$ oder $1 : \cos GCP = f : CP$ oder $1 : \cos\psi = f : \frac{a^2 \sin(\varphi - \psi)}{\sin\varphi}$, folgl. ist $a^2 \sin(\varphi - \psi) = f^2 \cos\psi \sin\varphi$ $= a^2(\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi)$, folglich $(a^2 - f^2)$ $\cos\psi\sin\varphi = a^2\cos\varphi\sin\psi$ oder $\frac{a^2 - f^2}{a^2}\,\text{tang}\,\varphi =$ $\text{tang}\,\psi$.

§. 48. Aufg. Eine Gleichung für die Ellipse aus den halben Durchmessern zu finden, wenn man einen derselben GH (Fig. 17.) zur Abscissenlinie, C zum Anfangspunkt der Abscissen CR, und RS die Parallele zum vereinigten Durchmesser KL, zur Ordinate annimmt.

Bew. Es sey $AC = a$, $CD = b$, $CG = f$, $CK = g$, $CR = \alpha$; $RS = \omega$, $CP = u$, $PG = y$, so ist $y = PG = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - u^2)}$. Nun ist 1) das $\triangle$ PGT $\backsim$ CQL, folglich verhält sich $GT^2 : CP^2 =$ $PG^2 : QL^2$ oder $\left(\frac{a^2 - u^2}{u}\right)^2 : CP^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - u^2) :$

b²

$\frac{b^2}{a^2}(a^2 - CQ^2)$. Hieraus ergibt sich nach gehöriger Reduktion $u^2 = a^2 - CQ^2$ oder $a^2 = u^2 + CQ^2$ $= CP^2 + CQ^2$. Es ist aber auch $QL^2 = \frac{b^2}{a}$ $(a^2 - CQ^2) = \frac{b^2}{a}(a^2 - a^2 + u^2) = \frac{b^2}{a^2}u^2$, folglich $QL = \frac{b}{a}u$ und $CQ = \sqrt{(a^2 - u^2)}$. Ferner ist

2) das $\triangle$ CWR $\backsim$ CPG, folglich verhält sich $WR : PG = CR : CG$ und $CW : CP = CR : CG$. Aus jener Proportion erhält man $WR = \frac{PG . CR}{CG}$, aus dieser $CW = \frac{CP . CR}{CG}$ oder $WR = \frac{\alpha b}{af}\sqrt{(a^2 - u^2)}$ und $CW = \frac{\alpha u}{f}$.

Nun lasse man aus S die gerade Linie SZ senkrecht auf AB und aus R die gerade Linie RX senkrecht auf SZ herab, so ist das $\triangle$ SRX $\backsim$ LCQ, folglich verhält sich $XR : SR = CQ : CL$ und $XS : SR$ $= QL : CL$; daher ist $XR = \frac{SR . CQ}{CL}$ und XS $= \frac{SR . QL}{CL}$ oder $XR = \frac{\omega}{g}\sqrt{(a^2 - u^2)}$ und $XS =$ $\frac{\omega bu}{ag}$, also $XS + XZ = XS + RW = SZ = \frac{b}{a}$

$\left(\frac{\omega u}{g} + \frac{\alpha}{f}\sqrt{(a^2 - u^2)}\right)$ und $CZ = CW - WZ = CW - RX = \frac{\alpha u}{f} - \frac{\omega}{g}\sqrt{(a^2 - u^2)}$. Nun aber verhält sich nach (§. 31.) $a^2 - CZ^2 : a^2 - AP^2 = ZS^2 : PG^2$. Schreibt man nun anstatt dieser Glieder, die vorhin dafür gefundenen Werthe, so erhält man

$$a^2 - \left(\frac{\alpha u}{f} - \frac{\omega}{g}\sqrt{(a^2 - u^2)}\right)^2 : a^2 - u^2 =$$

$\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{\omega u}{g} + \frac{\alpha}{f}\sqrt{(a^2 - u^2)}\right)^2 : \frac{b^2}{a^2}(a^2 - u^2)$. Dividirt man nun das zweite und vierte Glied durch $a^2 - u^2$, und alsdann das dritte und vierte durch $\frac{b^2}{a^2}$, so siehet man, daß das erste Glied dem dritten gleich ist. Erhebt man nun die Größen, wie es die Rechnung vorschreibt, ins Quadrat, so erhält man die Gleichung:

$$a^2 - \frac{\alpha^2 u^2}{f^2} + \frac{2\alpha u\omega}{fg}\sqrt{(a^2 - u^2)} - \frac{\omega^2}{g^2}a^2 + \frac{\omega^2}{g^2}u^2$$

$$= \frac{\omega^2 u^2}{g^2} + \frac{2\alpha u\omega}{fg}\sqrt{(a^2 - u^2)} + \frac{\alpha^2 a^2}{f^2} - \frac{\alpha^2 u^2}{f^2}.$$

Läßt man nun die sich in dieser Gleichung zerstörenden Größen weg, so bleibt die verlangte Gleichung

$$\omega^2 = \frac{g^2}{f^2}(f^2 - \alpha^2) \text{ oder } \omega = \frac{g}{f}\sqrt{(f^2 - \alpha^2)}.$$

Zus. Aus der gefundenen Gleichung folgt, daß

zu jeder bejahten oder verneinten Abscisse, zwei in entgegen gesetzter Richtung liegende Ordinaten gehören, daß dieselben Beziehungen zwischen den Abscissen, Ordinaten und dem Durchmesser Statt finden, als zwischen y und u auf der großen Axe und daß der Durchmesser, sowohl seinen zugeordneten Durchmesser, als alle mit der Tangente parallellaufende Sehnen halbirt.

2. Zus. Die gedachte Theilung eines jeden Durchmessers geschieht in dem Mittelpunkte der Ellipse.

3. Zus. Das Quadrat einer jeden Ordinate verhält sich zum Produkt der beiden Abschnitte desjenigen Durchmessers, auf welchem die Abscissen angenommen werden, wie das Quadrat des zugeordneten Durchmessers zum Quadrat des ersten Durchmessers.

§. 49. Aufg. Aus der vorhin gefundenen Gleichung für die Ellipse eine andere herzuleiten, in welcher die Abscissen vom Scheitelpunkte des Hauptdurchmessers an gerechnet werden.

Aufl. Man nehme GQ = t an, so ist $\alpha = f - t$

$\alpha^2 = f^2 - 2ft + t^2$, folglich $\omega^2 = g^2 - \frac{g^2\alpha^2}{f^2} = g^2 -$

$\frac{g^2}{f^2}(f^2 - 2ft + t^2) = \frac{2g^2t}{f} - \frac{g^2t^2}{f^2}$.

§. 50. Aufg. Den Haupt- und zugeordneten Durchmesser, den Mittelpunkt und die beiden Axen einer Ellipse zu finden.

Aufl. Man ziehe in der gegebenen Ellipse die beiden parallelen Sehnen SB′ und KL, halbire sie, ziehe durch die Theilungspunkte die gerade Linie CR und verlängere sie bis an den Umfang der Ellipse, so wird GH ein Durchmesser der Ellipse seyn. Nun halbire man GH, so ist der Theilungspunkt C der Mittelpunkt der Ellipse (§. 47. Zus. 2.). Durch diesen Punkt ziehe man KL bis an den Umfang der Figur, den Sehnen parallel, so wird KL der dem vorigen zugeordnete Durchmesser seyn. Endlich beschreibe man aus C einen Kreis, welcher in vier Punkten durch die Ellipse geht, ziehe durch selbige vier Sehnen und durch den Mittelpunkt zwei gerade Linien, deren jede den gegenüberliegenden Sehnen parallel läuft. Diese beiden letzten Linien sind die verlangten Axen.

Nähere Vergleichung der Parabel und der Ellipse.

§. 51. Aufg. Eine Ellipse und eine Parabel, zu welchen gleiche Paramer gehören, gehen durch denselben Scheitelpunkt A (Fig. 10.), die große Axe der Ellipse

ist $= a$; man soll für einerlei Abscisse AP $= x$, den Unterschied ihrer Ordinaten pm $= y$ und pn $= Y$ finden.

Aufl. Dieser Unterschied ist nach der Figur pn — pm. Es ist aber $y^2 = px$ (§. 13.) und $Y^2 = px - \frac{px^2}{a}$, folglich $Y - y = \sqrt{px} - \sqrt{\left(px - \frac{px^2}{a}\right)}$ $= \sqrt{px} - \sqrt{\left[px\left(1 - \frac{x}{a}\right)\right]} = \sqrt{px}\left[1 - \sqrt{\left(1 - \frac{x}{a}\right)}\right]$.

Wird x größer, so wächst auch $\frac{x}{a}$, allein $1 - \frac{x}{a}$ wird kleiner, folglich nimmt der eine Faktor $1 - \sqrt{\left(1 - \frac{x}{a}\right)}$ wie auch der andere $\sqrt{px}$, und daher das Produkt $= Y - y$ zu. Wird hingegen x gegen a sehr klein, so nehmen beide Faktoren und damit auch das Produkt derselben $= Y - y$ sehr ab. Hieraus läßt sich nun übersehen, daß bei einer großen Axe der Ellipse, die Bogen der Parabel und Ellipse nahe am Scheitelpunkte A, sich von einander nicht merklich unterscheiden können.

Zus. Nimmt man nun in der Ellipse den Abstand des Brennpunktes vom Scheitelpunkte, $= \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - b^2)}$ (§. 36. Zus.) $= \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - ap)}$ (§. 32.) $= \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{a^2\left(1 - \frac{p}{a}\right)} = \frac{1}{2}a\left[1 - \sqrt{\left(1 - \frac{p}{a}\right)}\right]$.

Es ist aber $\sqrt{\left(1-\frac{p}{a}\right)}=\left(1-\frac{p}{a}\right)^{\frac{1}{2}}=$

$1-\frac{1}{2}\frac{p}{a}-\frac{1}{8}\frac{p^2}{a^2}-\frac{1}{16}\frac{p^3}{a^3}-\frac{1}{32}\frac{p^4}{a^4}$ ꝛc. Ziehet man diese Reihe von 1 ab und multiplicirt alsdann die Differenz mit $\frac{1}{2}a$, so ist der Abstand des Scheitelpunktes vom Brennpunkte in der Ellipse, $=\frac{1}{4}p+\frac{1}{16}\frac{p^2}{a}+\frac{1}{32}\frac{p^3}{a^2}$ in der Parabel aber $=\frac{1}{4}p$ (§. 16.); folglich bezeichnet der Ausdruck $\frac{1}{16}\frac{p^2}{a}+\frac{1}{32}\frac{p^3}{a^2}+\ldots$ denjenigen Theil, um welchen der Abstand bei der Ellipse größer ist, als bei der Parabel. Dieser Unterschied aber wird immer kleiner, je größer a gegen p wird. Je kleiner aber dieser Unterschied ist, desto mehr nähert sich der Brennpunkt der Ellipse dem Brennpunkte der Parabel und kann man a so groß annehmen als man will, so kann man auch beide Brennpunkte so nahe an einander bringen, als man will.

Zus. 2. Haben beide Linien, die Parabel und Ellipse einerlei Scheitelpunkt und Brennpunkt, so findet man, wenn die gleiche Entfernung des Brennpunktes vom Scheitelpunkte, $=k$ gesetzt wird, den Parameter der Parabel $=4k$ und der Ellipse $=4k-\frac{4k^2}{a}$. Nimmt man nun in beiden Linien eine

gemeinschaftliche Abscisse, $= x$ an, und bezeichnet die dazu gehörigen Ordinaten der Parabel und Ellipse mit y und y', so ist $y = 2\sqrt{kx}$ und $y' = 2\sqrt{\left[kx\left(1-\frac{k}{a}\right)\left(1-\frac{x}{a}\right)\right]}$; daher ist $y - y' = 2\sqrt{\left[kx\left(1-\sqrt{\left(1-\frac{k}{a}\right)}\right)\left(\sqrt{\left(1-\frac{x}{a}\right)}\right)\right]}$. Je größer demnach a gegen k und x ist, je kleiner ist die Differenz $y - y'$, desto näher aber liegen die Punkte beider Linien in Vergleich mit der Entfernung von der Axe beisammen. Hieraus läßt sich nun beurtheilen, daß parabolische und elliptische Bogen in der Gegend ihres gemeinschaftlichen Scheitels nicht merklich von einander abweichen.

b) Von der Aehnlichkeit der Parabel und Ellipse.

§. 52. Erkl. Aehnliche Ellipsen nennt man diejenigen, deren beständige Größen, d. i. die große und kleine Axe und der Parameter proportional sind. Im Kegel gegen die Durchschnittsfiguren ähnliche Ellipsen, deren schneidende Ebenen mit einander parallel laufen.

1 Zus. Nimmt man in ähnlichen Ellipsen zwei Abscissen an, welche sich wie zwei beständige Linien verhalten, so sind ihre Ordinaten auch proportional.

2. Zus. Bezeichnen a, b und p die große und kleine Axe und den Param. bei einer Ellipse und a′, b′ und p′ dieselben Größen in einer andern ähnlichen, so verhält sich $a:a'=b:b'$, folglich ist $b'=\frac{a'b}{a}$. Es ist aber auch $p=\frac{b^2}{a}$ und $p'=\frac{b'^2}{a'}$; daher verhält sich $p:p'=\frac{b^2}{a^2}:\frac{a^2.b^2}{a^2.a'}=1:\frac{a'}{a}=a:a'$.

3. Zus. Nimmt man eine Gleichung für zwei Ellipsen, in welchen die Abscissen von dem Mittelpunkte an gerechnet werden, und bezeichnet man diese Abscissen mit u und u′, die damit zusammengehörigen Ordinate mit y und y′ und verhält sich alsdann $a:a'=u:u'$, so ist $y'^2=\frac{1}{4}p'^2-\frac{p'^2u'^2}{a^2}$ $=\frac{a'^2b^2}{4a^2}\frac{b^2}{a^2}-\frac{a'^2u^2}{a^2}=\frac{a'^2b^2}{a^2}\left(\frac{1}{4}-\frac{u^2}{a^2}\right)$. Es ist aber $\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{4}-\frac{u^2}{a^2}$, folglich $y^2=\frac{a'b^2}{a^2}\cdot\frac{y^2}{b^2}=\frac{a'^2y^2}{a^2}$ also $y^2:y'^2=a^2:a'^2$ und $y:y'=a:a'$.

§. 53. Schon die Vorstellung, daß parallele Durchschnittfiguren ähnlich sind, führt auf den Gedanken, daß alle Parabeln einander ähnlich seyn müssen. Sie entstehen auf einerlei Art, durch Ebenen, welche der Seite des Kegels parallel geführt werden (§. 11. Nr. II). Sind nun in zwei Parabeln die Ab-

sciſſen x und x′ den Parametern proportional, d. h. $p:p' = x:x'$, ſo iſt $x' = \frac{p'x}{p}$, ſo verhalten ſich die zu x und x′ gehörigen Ordinaten $y:y' = p:p'$. Denn es iſt $y^2:y'^2 = px:p'x' = px:\frac{p'^2x}{p} = p^2:p'^2$ woraus die angeführte Proportion entſpringt. Daher ſind alle Parabeln einander ähnlich.

Zuſ. Iſt alſo eine Gleichung zwiſchen x und y für eine krumme Linie gegeben, ſo findet man eine ähnliche, wenn man eine beliebige Abſciſſenlinie und einen beliebigen Anfangspunkt wählt, die neue Abſciſſe $x' = \lambda x$ und $y' = \lambda y$ macht. Jede andere beſtändige Zahl für λ gibt zwar eine andere krumme Linie, die jedoch der angenommenen ähnlich bleibt. Zur völligen Entwickelung der Gleichungen iſt zu bemerken, daß x′ und y′ zu demſelben Grade erhoben werden müſſen, in welchem x und y in der bekannten Gleichung vorkommen.

c) Von der Berechnung der Ellipſe ꝛc.

§. 54. Aufg. Den geometriſchen Inhalt der Ellipſe aus den beiden Axen zu finden.

Aufl. Man beſchreibe (Fig. 18.) über a = AB eine halbe Ellipſe AKB und einen Halbkreis ADB.

Nun schließe man den Kreis und die Ellipse durch lauter Rechtecke von gleichen Grundlinien wie PK und PD ꝛc. ein, so wird ihre Anzahl doppelt so groß, wenn man jede Grundlinie wie CP halbirt. Auf diese Art kann man dieselben so vermehren, daß der Unterschied zwischen den Rechtecken des Kreises und der Ellipse kleiner wie jede angebliche Größe wird (§. 25.). Nun setzt man CP = u, 2CD = b, so ist CM : CM'

$$= \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}b^2 - \frac{b^2u^2}{a^2}\right)} : \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - u^2)} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{a^2b^2 - 4u^2b^2}{4a^2}\right)} : \sqrt{\left(\frac{a^2 - 4u^2}{4}\right)} =$$

$$\sqrt{(a^2 - 4u^2)} : \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2 - 4u^2)} = \frac{b}{2b} : \tfrac{1}{2} = b : a.$$ Es verhält sich aber PCKM : PCDM' = PM : PM'. Da dieses von jedem Rechtecke wahr ist, die Summe aller zu AKB gehörigen Rechtecke aber die halbe Ellipse und die Summe aller zu ADB gehörigen Rechtecke den Halbkreis ausmachen, so verhält sich a : b = $\tfrac{1}{4}a^2\pi$: Inhalt der Ellipse $= \frac{\tfrac{1}{4}a^2b\pi}{a} = \tfrac{1}{4}ab\pi$.

1. Zus. Auf eine ähnliche Art läßt sich auch zeigen, daß der Flächeninhalt der Ellipse so gefunden wird, wenn man die Kreisfläche, deren Durchmesser die kleine Axe ist, mit der großen Axe multiplicirt und durch die kleine dividirt.

2. Zus. Daher ist die Ellipse so groß als eine Kreisfläche, deren Durchmesser die mittlere Proportionalgröße zwischen der großen und kleinen Axe ist.

3. Zus. Hieraus läßt sich nun übersehen, daß sich der Flächeninhalt des Kreisabschnittes zum Flächeninhalt des Ellipsenabschnittes AGH wie a:b verhalten. Dieses Verhältniß findet auch bei dem Kreis- und Ellipsen-Ausschnitt, d. i. bei LCA und GCA, Statt.

§. 55. Aufg. Den körperlichen Inhalt einer durch Umdrehung der Ellipse um ihre große Axe erzeugte Ellipsoide zu finden.

Aufg. Die Figur werde wie vorhin entworfen und der Kreis und die Ellipse durch Rechtecke begrenzt, so beschreiben selbige, bei der Umdrehung der ganzen Figur um die große Axe, Cylinder von gleichen Höhen, aber ungleichen Grundflächen, weil diese Kreisflächen sind, deren Halbmesser die Ordinaten des Kreises und der Ellipse sind. Der Kreis beschreibt die Kugel und die Ellipse die Ellipsoide. Die Theilung der Cylinderhöhen ist unbegrenzt, daher verhält sich jeder zur Ellipsoide gehörige Cylinder, zu dem zur Kugel gehörigen Cylinder, wie die Quadrate ihrer Halbmesser. Die Halbmesser beider Körper sind CK und CD, PM und PM′, pm und pm′ ꝛc. Aber alle diese verhalten sich wie CK zu

CD. In diesem Verhältnisse stehen auch die Summen der zu beiden Körpern gehörigen Cylinder, folglich auch die Körper selbst, d. i. die Kugel und die Ellipsoide. Bezeichnet also K den körperlichen Inhalt der Kugel, E der Ellipsoide, so verhält sich $E:K = CK^2:CD^2 = b^2:a^2$, oder $E:\frac{4}{3}a^3\pi = b^2:a^2$, folglich $E = \frac{4}{3}ab^2\pi$. Ist also die halbe große Axe $a = 540'$; die halbe kleine Axe $b = 475'$, so ist $E = \frac{4}{3}540 . 475^2 . 3,14159 = \frac{4}{3}540 . 225625 . 3,14159 = 510351 29,5500$.

III. Abschnitt.

Von der Hyperbel.

---

§. 56. Bei der Entwickelung der Gleichungen für die Hyperbel und bei deren Entstehung aus dem Kegelschnitte, lassen sich dieselben Betrachtungen, als bei der Ellipse (§. 29—32.) anstellen. Die allgemeine (§. 31.) angegebene Gleichung wird auch hier zum Grunde gelegt; nur wird der eingeschlossene Faktor mit dem untern Vorzeichen genommen. Stellt nun (Fig. 5.) EG′ die Richtung der schneidenden Ebenen vor und siehet man hier EG

als die erste Axe an, welche man $= a$ setzt, so ist die Gleichung für die Hyperbel für rechtwinkl. Coordinaten zwischen x u. y, $y^2 = \frac{\sin\beta \sin(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}\alpha^2}(ax + x^2)$. Setzt man nun $x = -\frac{1}{2}a$, so wird $y^2 = -\frac{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)a^2}{4\cos\frac{1}{2}\alpha^2}$ folglich $y = \pm\frac{a}{2\cos\frac{1}{2}\alpha}\sqrt{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}\sqrt{-1}$. Bezeichnet man hier nun dieselbe Größe (wie in §. 31) mit demselben Buchstaben, d. i. setzt man hier $\frac{a}{2\cos\frac{1}{2}\alpha}\sqrt{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)} = \frac{1}{2}b$, so ist in diesem Falle $y = \frac{1}{2}b\sqrt{-1}$. Diese Gleichung gibt zu erkennen, daß eine Ordinate für $x = \frac{1}{2}a$ nicht möglich ist; obgleich man sich eine aus C senkrecht errichtete Linie von der Größe b wohl vorstellen kann. Alsdann kann man die Gleichung für die Hyperbel durch $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(ax + x^2)$ oder $= \frac{b^2}{a}x + \frac{b^2x^2}{a^2}$ bezeichnen.

1. Zus. Hieraus siehet man nun, daß y desto größer wird, je größer der bejahte Werth von x wird und daß mit dem Wachsthum von x, auch y über alle Grenzen zunehmen kann. Ist der Werth von x verneint, so erhält der veränderliche Faktor der Gleichung $ax + x^2 = x(a + x)$ die Gestalt $= -x(a - x) = x(x - a)$. Also ist y unmöglich, so lange $x < a$ ist,

d. h. die krumme Linie kann sich mit ihrem Schenkel über den Raum EG zwischen beiden Scheiteln nicht verbreiten. Wird aber $x > a$, so ist $ax > a^2$, folglich wird der Werth von y bei dieser Annahme bejaht und nimmt wieder über alle Grenzen zu, wenn x ohne Ende fortwächst, und die Hyperbel hat noch einen andern, mit unbegrenzt fortlaufenden Schenkeln gebildeten, Zweig.

2. Zus. Die Länge von $EG = a$ wird durch die Stellen bestimmt, an welchen y verschwindet. Dieses geschieht einmahl, wenn $x = 0$, uud dann, wenn $x = -a$ wird, d. i. in E und G, d. i. in den Scheitelpunkten der Hyperbel. In allen übrigen Stellen der Verlängerungen von EG gehören zu jeder Abscisse, zwei gleiche in entgegengesetzter Richtung liegende Ordinaten, woraus hervorgeht, daß die Hyperbel durch die Axe in zwei gleiche und ähnliche Theile getheilt wird, weil $y^2 = \pm \frac{b}{a} \sqrt{(ax + x^2)}$ ist.

§. 57. Man kann sich nun die Durchschnittsfigur, welche entsteht, wenn die schneidende Ebene der Axe des Kegels parallel angenommen wird, nach (Fig. 19.) besonders auf eine Ebene zeichnen, wo KL die große Axe, C den Mittelpunkt, GH die kleine Axe der Hyperbel vorstellt. Nimmt man nun zur

ersten und zweiten Axe die dritte geometr. Proportionalgröße, so heißt dieselbe hier, wie bei der Ellipse, der Parameter der Hyperbel und nach dieser Annahme ist $a:b = b:p$, folglich $p = \frac{b^2}{a}$.

Zus. Man kann daher die oben für die Hyperbel abgeleitete Gleichung auch vermittelst des Parameters und der ersten Axe bestimmen. Diese Gleichung ist $y^2 = px + \frac{px^2}{a}$. Vergleicht man nun die Gleichungen für die Ellipse und Hyperbel mit einander, so kann man sich auch die Vorstellung machen, als wäre diese aus jener durch Annahme einer verneinten großen Axe entstanden.

§. 58. Aufg. Die Gleichung für die Hyperbel mit den beiden Axen so zu verändern, daß die Abscissen vom Mittelpunkte E an gerechnet werden.

Aufl. Es sei (Fig. 19.) $CP = u = CL + LP = \frac{1}{2}a + x$, so ist $x = u - \frac{1}{2}a$ und $x^2 = (u - \frac{1}{2}a)^2 = u^2 - au + \frac{1}{4}a^2$. Legt man nun die oben gefundene Gleichung aus den beiden Axen zum Grunde, nach welcher $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(ax + x^2)$ ist, so nimmt dieselbe, wenn man darin für x und x^2 die vorigen Werthe

setzt, folgende Gestalt an, $y^2 = \frac{b^2}{a}(au - \frac{1}{2}au + u^2 - au + \frac{1}{4}a^2) = \frac{b^2}{a^2}(u^2 - \frac{1}{4}a^2)$ oder $= \frac{b^2u^2}{a^2} - \frac{b^2}{4}$.

1. Zus. Bringt man die halben Axen in Rechnung, so ist $u = a + x$ und die Gleichung: $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(u^2 - a^2) = -b^2 + \frac{b^2u}{a^2}$. Aus dieser Gleichung folgt, daß sich bei der Hyperbel das Quadrat der ersten Axe zum Quadrate der zweiten verhält, wie das Produkt aus den Entfernungen der Ordinaten von den beiden Scheitelpunkten, zum Quadrat einer jeden Ordinate.

2. Zus. Will man die Gleichung in (Zus. 1.) aus der ersten Axe und dem Parameter $p = \frac{b^2}{a}$ ausdrucken, so findet man $y^2 = \frac{pu^2}{a} - ap = -ap + \frac{pu^2}{a}$.

3. Zus. Vergleicht man nun die Gleichung für die Hyperbel (§. 56.) mit der Gleichung für die Ellipse in (§. 34.), so findet man jene aus dieser, wenn man in dieser $b\sqrt{-1}$ für b und also $-b^2$ für $+b^2$ setzt. Daher kann man auch sagen, die Hyperbel sey eine Ellipse, deren kleine Axe unmöglich ist. Diese Redensarten müssen nicht so verstanden wer-

werden, als wolle man dadurch sagen, die Hyperbel ist wirklich eine Ellipse von der angezeigten Beschaffenheit, sondern diese Ausdrücke sind Abkürzungen für die Rechnung. Man kann aus den Gleichungen für die Ellipse, sehr leicht die Gleichungen für die Hyperbel und hieraus die ihr zukommenden Eigenschaften ableiten, wenn man den Werth von b^2 verneint annimmt.

§. 59. Aufg. Die Brennpunkte der Hyperbel zu finden.

Aufl. Hat die Hyperbel einen oder mehrere dergleichen Punkte, so liegen sie an denjenigen Stellen der ersten Axe, wo die Ordinate y dem halben Parameter gleich ist (§. 35.). Nun nehme man an, (Fig. 19.) die erste Axe der Hyperbel sey $KL = a$, die zugeordnete Axe $GH = b$ und also $p = \frac{b^2}{a}$, so muß es in der Axe eine Stelle geben, in welcher $y = \frac{1}{2}p = \frac{b^2}{2a}$ ist. Hier wäre demnach $y^2 = \frac{b^4}{4a^2}$ od. $\frac{b^4}{4a^2} = \frac{b^2u^2}{a^2} - \frac{1}{4}b^2$ oder $\frac{b^2}{a^2}u^2 = \frac{a^2b^2 + b^4}{4a^2}$, folglich $u^2 = \frac{a^2 + b^2}{4}$ und also $u = \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + b^2)}$. Dieses ist allemahl eine mögliche und beständige Größe. Daher hat die Hyperbel auf ihrer Axe zwei Brenn-

Q

punkte F und f, die von dem Mittelpunkte an gerechnet, zu beiden Seiten in gleichem Abstande aber nach entgegengesetzter Richtung liegen. Daher sind sie von ihren nächsten Scheitelpunkten auch gleich weit entfernt.

Zus. Nennt man nun hier, wie bei der Ellipse, die Entfernung des Brennpunktes vom Mittelpunkte, die Eccentricität e, so ist das Quadrat der Eccentricität $= \frac{1}{4}(a^2+b^2)$ und die Entfernung des Brennpunktes von einem Scheitelpunkte $= \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)} - \frac{1}{2}a$.

§. 60. Lehrs. Der Unterschied der beiden geraden Linien, welche von einem beliebigen Punkte M der Hyperbel nach den Brennpunkten gezogen werden, ist allemahl der ersten Axe gleich.

Bew. Man setze, wie oben, KL $= a$, GH $= b$, CP $= u$, PM $= y$, so ist PF $=$ CP $+$ CF $= u + \frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)}$. Daher ist

$$FM^2 = PF^2 + PM^2 = [u + \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)}]^2 + y^2$$

$$= u^2 + u\sqrt{(a^2+b^2)} + \tfrac{1}{4}(a^2+b^2) + \frac{u^2b^2}{a^2} - \tfrac{1}{4}b^2$$

$$= \frac{u^2(a^2+b^2)}{a^2} + u\sqrt{(a^2+b^2)} + \tfrac{1}{4}a^2;$$

folglich $FM = \frac{u\sqrt{(a^2+b^2)}}{a} + \frac{1}{2}a$. Ferner ist

$$fM^2 = Pf^2 + PM^2 = (CP - Cf)^2 + PM^2$$
$$= [u - \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)}]^2 + y^2$$
$$= u^2 - u\sqrt{(a^2+b^2)} + \tfrac{1}{4}(a^2+b^2) + \frac{u^2b^2}{a^2} - \tfrac{1}{4}b^2$$
$$= \frac{u^2(a^2+b^2)}{a^2} - u\sqrt{(a^2+b^2)} + \tfrac{1}{4}a^2.$$ Also
$$fM = \frac{u\sqrt{(a^2+b^2)}}{a} - \tfrac{1}{2}a.$$ Ziehet man nun diesen Werth fM von jenem FM ab, so ist der Unterschied $FM - fM = a = KL$.

§. 61. Aufg. Aus den beiden gegebenen Axen a und b eine Hyperbel zu zeichnen.

Aufl. Man ziehe b senkrecht durch den Mittelpunkt a, so ist $e = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)}$. Nun nehme man (Fig. 19.) von C aus die gerade Linie $CF = Cf = e$, so sind F und f die Brennpunkte der Hyperbel. Alsdann bestimme man sich für die zu zeichnende Figur so viel Punkte als man will und zwar auf eben die Art, wie den Punkt M, wie aber dieser gefunden wird, soll hier gezeigt werden. Man nehme die zum beliebigen Punkt M gehörige Abscisse CP und beschreibe aus den beiden Brennpunkten zwei einander durchschneidende Kreisbogen, den einen aus F mit dem Halbmesser $FM = KP$ und den andern aus f mit dem Halbmesser $fM = LP$, so ist der

Durchschnittspunkt M zugleich ein Punkt in der Hyperbel, weil FM—fM=KP—LP und diese Differenz für alle Punkte, welche auf dieselbe Art bestimmt werden, von gleicher Größe bleibt.

§. 62. Aufg. Eine Gleichung für die Hyperbel zu finden, wenn die Ordinaten in einen der Brennpunkte zusammen laufen.

Aufl. Man setze (Fig. 19.) den W. LFM $=\alpha$, FM$=z$, so ist Ff$=2e$. Nun ist aber im $\triangle$FMf, die Seite $fM^2=4e^2+z^2-4ez\cos\alpha$; nach (§. 58.) aber ist $a=FM-fM$, oder wenn a die halbe Axe bezeichnet, $FM-fM=2a$; folglich $fM^2=(z-2a)^2=z^2-4za+4a^2$. Hieraus folgt $az-a^2=ez-e^2$ oder

$$z(a-e\cos\alpha)=a^2-e^2, \text{ also } z=\frac{a^2-e^2}{a-e\cos\alpha}=\frac{-b^2}{a-e\cos\alpha}$$

$$=\frac{b^2}{e\cos\alpha-a}.$$

Zus. Der Cosinus des W. α läßt sich hier auch noch (§. 17. Z. 1. Eb. Trig.) aus dem $\triangle$ FPM bestimmen. Es ist nehmlich $\cos\alpha=\frac{FP}{FM}=\frac{e+u}{z}$; daher

wird $z=\frac{b^2}{e\cos\alpha-a}=\frac{b^2}{e\frac{e+u}{z}-a}$; oder $e^2+eu-az=zb^2$, folglich $az=e^2-b^2+eu=a^2+eu$,

folglich $z = a + \frac{eu}{z}$. Da aber $FM - fM = 2a$ ist, so findet man $fM = FM - 2a = z - 2a = a + \frac{eu}{z} - 2a = \frac{eu}{z} - a$.

§ 63. Aufg. An einen gegebenen Punkt der Hyperbel eine Tangente zu ziehen.

Aufl. Man ziehe (Fig. 20.) aus den Brennpunkten F und f nach dem gegebenen Punkt M die geraden Linien FM und fM, mache $MR = Mf$, verbinde R und f durch eine gerade Linie, halbire den W. RMf, so ist die Theilungslinie MT die gesuchte Tangente.

Bew. Denn hätte die Tangente noch einen Punkt etwa wie N mit der Hyperbel gemein, so ziehe man NR, NF und Nf. Alsdann ist $NF < NR + RF$, folglich $NF - NR < RF$ oder $NF - Nf < FR$. Allein es ist $FR = MF - Mf$, also $NF - Nf < MF - Mf$. Folglich ist N kein Punkt der Hyperbel und die Tangente trifft nur den einzigen Punkt M.

Zus. Verlängert man die Tangente über den Punkt M hinaus, so ist der W. $RMO = OMf$; allein der W. RMO ist $= NME$, also ist der W. $OMf = NME$; woraus erhellet, daß auch bei der Hyperbel die Tangente eines Punktes M, mit den aus diesem Punkte, nach den Brennpunkten gezoge-

nen, geraden Linien MF und Mf gleiche Winkel macht.

§. 64. Aufg. Die Subtangente eines in der Hyperbel liegenden Punktes, d. i. die Länge der Linie TB (Fig. 10.) zu finden.

Aufl. Man ziehe durch den gegebenen Punkt M eine die Hyperbel durchschneidende Linie T'R und beobachte zur ferneren Bestimmung der Subtangente das oben (§. 19) bei der Parabel erklärte Verfahren. Man setze $CK=CL=a$, $CB=u$, $BQ=k$, die unbestimmte Länge $T'B=S'$, $CT'=BC-T'B=u-S'$; $T'Q=S'+k$; $LQ=CL+CB+BQ=a+u+k$, $KQ=CB+BQ-CK=u+k-a$. Daher ist $LQ\times KQ$ $u^2+2ku+k^2-a^2$; ferner ist $KB=CB-CK=u-a$ und $LB=u+a$; folglich das Produkt aus KB in $LB=u^2-a^2$. Nun ist $\triangle BDT' \backsim QRT'$, folglich verhält sich $QR^2:BD^2=T'Q^2:T'B^2$ (§. 13. Eb. Geom.), es verhält sich aber $QR^2:BD^2$

$$=\frac{b^2}{a^2}(QC^2-a):\frac{b^2}{a^2}(BC^2-a^2) \text{ nach der Gl. d. Hyp.}$$

$$=(QC^2-a^2):BC^2-a^2)$$

$$=QC+a\times QC-a:BC+a\times BC-a; \text{ od. nach der Fig.}$$

$=LQ\times KQ:LB\times KB$, also verhält sich $T'Q^2:T'B^2$ $=LQ\times KQ:LB\times KB$ oder $(S'+k)^2:S'^2=u^2+2ku+k^2-a^2:u^2-a^2$, folglich $(S'+k)^2-S'^2:S'^2=2ku+k^2:u^2-a^2$; d. i. $2S'k+k^2:S'^2=2ku+k^2:$

$u^2 - a^2$ (§. 52. Nr. 4. Alg.), daher ist $2S'u^2k - 2S'a^2k + u^2k^2 - a^2k^2 = 2S'^2ku + S'^2k^2$ (§. 51. Alg.), folglich $2S'u^2 - 2S'a^2 + u^2k - a^2k = 2S'^2u + S'^2k$. Diese Schlüsse sind vollkommen richtig, so lange die T'R die Hyperbel durchschneidet. Stellet man sich aber vor, die gedachte Linie werde um den Punkt D so gedrehet, daß T' nach K und R nach D rückt, bis endlich R mit D zusammen fällt, so wird k immer kleiner, in der letzten Richtung aber wird k=o, und S' wird bestimmt, es wird S' die zum Punkt D gehörige Subtangente =S. Dadurch aber erscheint die vorige Gleichung unter der Form $2Su^2 - 2Sa^2 = 2S^2u$, oder wenn man durch 2S dividirt, so wird $u^2 - a^2 = Su$, folglich ist $S = \frac{u^2 - a^2}{u} = u - \frac{a^2}{u}$.

§. 65. Aufg. Die Subnormale, Normale und Tangente für jeden gegebenen Punkt der Hyperbel zu finden.

Aufl. Es verhält sich (Fig. 20.) 1) TP:PM = PM:PQ oder $\frac{u^2 - a^2}{u} : y = y : PQ$, d. i. zur Subnormale, folglich ist $PQ = \frac{y^2u}{u^2 - a^2} = \frac{b^2(u^2 - a^2)u}{a^2(u^2 - a^2)} = \frac{b^2u}{a^2}$.

2) Es ist die Normale $PQ = \sqrt{(PM^2 + PQ^2)} =$

$$=\sqrt{\left(y^2+\frac{b^2u^2}{a^2}\right)}=\frac{\sqrt{(a^2y^2+b^2u^2)}}{a}.$$

3) Es ist die Tangente $TM=\sqrt{(TP^2+PM^2)}$ oder $TM^2=TP^2+PM^2=\left(\frac{u^2-a^2}{u}\right)^2+y^2=$

$$\frac{(u^2-a^2)^2+u^2y^2}{a^2}=u^2-a^2+\frac{a^4+u^2y^2}{u^2}=$$

$$\frac{a^2y^2}{a^2}+\frac{a^4+u^2y^2-a^2u^2}{u^2}=$$

$$\frac{a^2u^2y^2+u^2y^2b^2-a^2b^2(u^2-a^2)}{b^2u^2}=$$

$$\frac{y^2[a^2(u^2-a^2)+b^2u^2}{b^2u^2},$$ folglich ist $TM=$

$$\frac{y}{bu}\sqrt{[(a^2+b^2)u^2-a^4]}=\frac{y}{bu}\sqrt{(e^2u^2-a^4)}.$$ Daher ist für diesen Punkt

1) die Subtangente $TP=\frac{u^2-a^2}{u}=u-\frac{a^2}{u}$

2) die Tangente $=\frac{y\sqrt{(e^2u^2-a^4)}}{bu}$

3) die Subnormale $=\frac{b^2u}{a^2}$ und

4) die Normale $=\frac{\sqrt{(a^2u^2+b^2y^2)}}{a}$.

1. Zus. Daher ist $CT=BC-BT=u-\left(\frac{u^2-a^2}{u}\right)$ $=\frac{a^2}{u}$.

2. Zus. Es ist $TM = \frac{y\sqrt{(e^2u^2 - a^4)}}{bu} =$ $\frac{ay}{bu}\sqrt{\left(\frac{e^2u^2 - a^4}{a^2}\right)} = \frac{ay}{bu}\sqrt{\left(\frac{eu + a^2}{a}\right)} \times$ $\sqrt{\left(\frac{eu - a^2}{a}\right)}$. Es ist aber (Fig. 19.) $\frac{eu}{a} + a =$ fM und $\frac{eu}{a} - a = FM$; folglich ist $TM =$ $\frac{ay}{bu}\sqrt{FM \, . \, fM}$.

3. Zus. Nun kann man auch auf eine sehr einfache Art die Tangente an einen gegebenen Punkt der Hyperbel ziehen, wenn man zu dem gegebenen Punkt die Ordinate zieht, zu der dazu gehörigen Absciſſe und der halben Axe a die dritte geometrische Proportionallinie sucht, diese von C nach F trägt, und den Punkt L mit dem gegebenen Punkte M verbindet, so wird TM die verlangte Tangente seyn.

b) Von den Eigenschaften der Hyperbel in Absicht ihrer Asymptoten.

§. 66. Die Asymptote ist eine gerade Linie, welche neben einer krummen dergestalt fortläuft, daß der Abstand zwischen beiden immer kleiner wird, je weiter man sie auszieht, welche aber einander nie treffen, so weit man sie auch verlängern mag.

Die Asymptote kann auch eine krumme Linie, jedoch mit den angeführten Eigenschaften seyn.

Zus. Setzt man (Fig. 19.) in L die gh = b senkrecht auf die Axe, so daß gh = GH und Lg = Lh wird, und zieht durch C und g, und C und h gerade Linien von unbestimmter Länge, so heißen diese, die Asymptoten der Hyperbel, die Theile Cm und Cn gehören zu den Schenkeln LM und LN; die Theile Cr und Ce zu den Schenkeln CR und CE; und der Winkel mCn, welchen beide Asymptoten am Mittelpunkte der Hyperbel einschließen, wird der Asymptotenwinkel genannt. Die senkrechte Linie GH theilt die ganze Figur in zwei gleiche und ähnliche Theile, welche man auch entgegengesetzte Hyperbeln zu nennen pflegt, obgleich sie eigentlich als Theile nur eine Hyperbel zusammensetzen. Auch sind diejenigen Stücke derselben, welche innerhalb der vier rechten Winkel GCP, HCP, GCQ und HCQ liegen, einander gleich und ähnlich.

§. 67. Lehrs. Die Asympt. kommen den Schenkeln der Hyperb. immer näher, je weiter man sie verlängert, sie treffen aber nie mit ihnen zusammen, man mag sie verlängern so weit man will.

Bew. Es ist PC = CL + LP = $\frac{1}{2}$a + x; Lg = $\frac{1}{2}$gh

$=\frac{1}{2}b=\frac{1}{2}\sqrt{ap}$. Nun verhält sich CL:Lg=CP:Pm oder $\frac{1}{2}a:\frac{1}{2}\sqrt{ap}=\frac{1}{2}a+x:Pm$ setzt man nun $Pm=z$ und quadrirt die vier Glieder, so ist $\frac{1}{4}a^2:\frac{1}{4}ap=(\frac{1}{2}a+x)^2:z^2$ oder $a:p=(\frac{1}{2}a+x)^2:z^2$, folglich $z^2=\frac{(\frac{1}{4}a^2+ax+x^2)p}{a}=\frac{1}{4}ap+px+\frac{px^2}{a}$. Nun ist $y^2=px+\frac{px^2}{a}$, folglich $z^2-y^2=\frac{1}{4}ap=\frac{1}{4}b^2$, d. i. die Differenz der Quadrate der Ordinaten an der Asymptote und Hyperbel sind einer bestimmten und beständigen Größe gleich. Größen aber, deren Quadrate verschieden sind, sind selbst verschieden. Daher wird $z-y$, d. i. $Pm-PM$ nie ganz verschwinden. Allein dieser Unterschied der beiden Größen wird immer kleiner. Denn da $z^2-y^2=(z+y)(z-y)=\frac{1}{4}b^2$, so ist $z-y=\frac{b^2}{4(z+y)}$. Jeder Bruch nimmt ab, wenn bei dem unveränderten Zähler der Nenner zunimmt, welches geschieht, je weiter die Linien verlängert werden. Daher nähert sich die gerade Linie seinem Schenkel der Hyperbel desto mehr, je weiter beide ausgezogen werden. Da nun die Differenz zwischen ihnen wohl kleiner werden aber nie aufhören kann, so kann die Asymptote die Hyperbel nie erreichen. Darauf bezieht sich auch der Ausdruck **Asymptoten**, welcher **nie zusammenfallende** Linien bedeutet.

1. Zus. Rechnet man die Abscissen vom Mittelpunkte, so ist $CL:Lg = CP:Pm$ oder $\frac{1}{2}a:\frac{1}{2}b = u:z$, folglich $Pm = z = \frac{bu}{a}$. Eben so findet man $Pm = z' = -\frac{bu}{a}$.

2. Zus. Da $z - y = \frac{b^2}{4(z+y)} = mM$ und $Mn = Pn + PM = z + y$ ist, so gibt das Produkt aus $mM . Mn = \frac{1}{4}b^2$ eine unveränderliche Größe.

3. Zus. Der Asymptotenwinkel mCn wird von der Axe PQ halbirt und es ist $\tang mCP = \frac{gL}{CL} = \frac{b}{a}$. Da nun $b^2 = ap$ ist, so ist $b < a$, folglich $\tang mCP < 1$, folglich $mCP < \frac{1}{2}R$ und $2mCP < R$.

3. Zus. Ziehet man die gerade Linie LO der Cn parallel, so ist $LO = \frac{1}{2}Ch = \frac{1}{2}Cg = CO = Og$. Das Quadrat dieser Größe CO oder OL wird die Potenz der Hyperbel genannt.

§. 68. Lehrs. Die Potenz der Hyperbel ist so groß als der sechszehnte Theil von der Summe der Quadrate beider Axen.

Bew. Es ist $OC = \frac{1}{2}Ch$ und $OC^2 = \frac{1}{4}Ch^2$; allein Ch ist $= \frac{a^2+b^2}{4}$, folglich $\frac{1}{4}Ch^2 = OC^2 = \frac{a^2+b^2}{16}$.

§. 69. Lehrs. Der Unterschied zwischen den zu derselben Abscisse gehörigen rechtw. Ordinaten der Asymptoten und Hyperbel ist auf beiden Seiten der Axe von gleicher Größe.

Bew. Es ist CP=CP; der W. mCP=nCP und CPm=CPn=R, folglich △ mCP≅nCP; also Pm=Pn. Zu derselben Abscisse CP gehören die beiden gleichen in entgegengesetzter Richtung liegenden Ordinaten PM und PN, folglich ist Pm—PM= Pn—PN, d. i. Mm=Nn.

§. 70. Lehrs. Ziehet man durch einen gegebenen Punkt M der Hyperbel, eine gerade Linie MZ bis an die eine, aber parallel mit der andern Asymptote, so wird von jener ein Stück CZ abgeschnitten, welches mit ZM multiplicirt ein der Potenz der Hyperbel gleiches Produkt gibt.

Bew. Es ist ZMm=Chg und mZM=mCn, folglich ist das △ mZM ∽ Chg, daher verhält sich gC : gh=mZ : mM=CZ : Mn (§. 103. Eb. Geom.), also ist $CZ = \frac{Mn.gC}{gh}$ und $ZM = \frac{mM.Cg}{gh}$. Also ist

$$CZ.ZM = \frac{Mm.Mn.gC}{gh^2} = \frac{z-y.z+y.\frac{1}{4}(a^2+b^2)}{b^4}$$

aus (§. 65. Zus. 2.) ergibt sich, daß $\overline{z-y}.\overline{z+y} = \frac{1}{4}b^2$ sey; daher findet man $CZ.ZM = \frac{a^2+b^2}{16}$. Diesen Ausdruck pflegt man als eine Gleichung der Hyperbel zwischen ihren Asymptoten zu betrachten, in welcher die Abscissen auf der einen Asymptote von dem Mittelpunkte C an gerechnet und die dazu gehörigen Ordinaten, mit der andern parallel gezogen werden.

Zus. Bezeichnet man nun CZ mit u′ und ZM mit t, so ist $tu' = \frac{a^2+b^2}{16}$, folglich ist $t = \frac{a^2+b^2}{u'16}$. Macht man nun $CL = \frac{1}{2}a$, $gh = b$, so findet man hieraus den Asymptotenwinkel gCh, welcher dem Ordinatenwinkel mZM gleich ist. Aus diesen Stükken läßt sich nun zu jeder gegebenen Abscisse u′, die dazugehörige Ordinate t und dadurch die Zeichnung von der ganzen Hyperbel entwerfen.

§. 71. Lehrs. Wenn man eine beliebige gerade Linie D′E′ durch die Hyperbel und ihre Asymptoten zieht, so sind die Abschnitte DD′ und EE′ zwischen den gedachten Linien einander gleich.

Bew. Man ziehe die gerade Linie DI und RE senkrecht durch die Axe, so verhält sich

$E'E : eE = E'D : DI$ und

$ED' : Er = DD' : Dd$, folglich

$E'E . ED' : eE . Er = E'D . DD' : DI . Dd$

Es ist aber $eE . Er = DI . Dd$, folglich

$E'E . ED' = E'D . DD'$, d. i.

$E'E(ED + DD') = (EE' + ED)DD'$

$EE' . ED + EE' . DD' = EE' . DD' + ED . DD'$

d. i. $DD' = EE'$

Zus. Hieraus folgt nun, daß die durch den Punkt D gezogene Tangente Tr durch B in zwei gleiche Theile getheilt wird.

2. Zus. Ziehet man nun die Ordinate $DD' \ddagger CE'$, so ist $rD' = D'C$. Also ist bei der Hyperbel, an der Asymptote, die Subtangente der Abscisse gleich. Daher kann man an jeden gegebenen Punkt der Hyperbel, zwischen ihren Asymptoten leicht die Tangente ziehen.

3. Zus. Wegen der gleichen Abschnitte DD' und EE' kann man auch, nach folgender Angabe, leicht eine Hyperbel zeichnen.

§. 72. **Aufg. Eine Hyperbel zu beschreiben, welche durch einen gegebenen zwischen den Schenkeln eines Winkels liegenden Punkt D geht.**

Aufl. Man ziehe durch D die beliebige gerade Linie dI, mache $dD = iI$, so sind B und i Punkte

in der Hyperbel. Durch denselben Punkt D ziehe man mehrere andere gerade Linien an die Schenkel des Winkels und bestimme wie vorhin deren gleiche Abschnitte, so erhält man eben so viele in der Hyperbel liegende Punkte. Dieses Verfahren kann man bei den gefundenen Punkten der Hyperbel wiederholen, und dadurch so viel andere Punkte für die krumme Linie bestimmen, als man will.

§. 73. Aufg. Aus dem Asymptotenwinkel gCh und einem Punkte der Hyperbel M, die beiden Axen a und b zu finden.

Aufl. Man ziehe ZM$\ddagger$Ch, theile den Winkel bei C durch CP in zwei gleiche Theile, suche zwischen CZ und MZ die mittlere geometrische Proportionallinie, trage selbigen von C nach O, so ist $CO^2 = \frac{a^2+b^2}{16}$. Alsdann ziehe man durch O zu Ch eine Parallele bis an die Theilungslinie CP in L, so wird dadurch die halbe erste Axe CL$=\frac{1}{2}$a gefunden. Ziehet man nun durch L die senkrechte Linie gh bis an die Schenkel, so ist gh$=$b.

Will man diese Werthe durch Rechnung finden, so darf man sich nur erinnern, daß durch den Punkt M der Hyperbel CZ und MZ und durch den Winkel gCh das Verhältniß der beiden Axen zu einander gegeben worden ist. Setzt man nun gCL$=\varphi$,

so

so ist $b = a \tan\varphi$ (§. 17. Zus. 2. Trigonometrie). Nun ist $CZ.ZM = \frac{a^2+b^2}{16} = \frac{a^2+a^2 \tan\varphi^2}{16} = a^2\left(\frac{1+\tan\varphi^2}{16}\right)$; folglich $a^2 = \frac{16.CZ.ZM}{1+\tan\varphi}$ oder $a = 4\cos\varphi\sqrt{CZ.ZM}$, d. i. gleich der ersten Axe. Schreibt man nun den Werth für a in die vorhergehende Gleichung von b, so findet man die zweite Axe $b = 4\cos\varphi \tan\varphi\sqrt{CZ.ZM} = 4\sin\varphi\sqrt{CZ.ZM}$. Gesetzt der Asymptotenwinkel $mCn = 2\varphi$. sey $40°36'$, $CZ=24$ und $ZM=6$, so ist $\sqrt{CZ.ZM}=\sqrt{24.6} =12$, folglich $a=4.12\cos\varphi$ und $b=4.12.\sin\varphi$ oder $a=4.12.\cos 20°18'$ und $b=4.12\sin 20°18'$, d. i. $a=4.12.0,9378889=45,0186672$ und $b = 4.12.0,3469357= 16,6529136$.

Zus. Aus den beiden Axen läßt sich der Parameter, welcher $p=\frac{b^2}{a}$, aber auch der Winkel φ bestimmen. Denn es ist $\tan\varphi=\frac{b}{a}$ und $\tan 2\varphi = \frac{2\tan\varphi}{1-\tan\varphi^2}$; oder wenn man für $\tan\varphi$ seinen Werth $\frac{b}{a}$ schreibt, so ist $\tan 2\varphi=\frac{2ab}{a^2-b^2} = \frac{2ab}{a+b.a-b}$.

§. 74. Erkl. Ziehet man durch den Mittel-

punkt C der Hyperbel eine gerade Linie dergestalt, daß sie die krumme Linie auf beiden Seiten dieses Punktes in D und D″ trifft, so heißt selbige ein **Durchmesser** der Hyperbel und die Punkte D′D″ die **Scheitelpunkte** des Durchmessers. Die durch den Scheitelpunkt D aber zwischen den Asymptoten liegende Tangente tDt′ wird der **zugeordnete** Durchmesser genannt.

§. 75. Aufg. **Eine Gleichung für die Hyperbel zu finden, wenn die Parallelen des zugeordneten Durchmessers, als Ordinaten betrachtet werden.**

Aufl. Man setze den halben ersten Durchmesser CD=f, Dt=g, die dem zugeordneten Durchmesser parallele Ordinate px=pG′=y′, und Cp=w, ziehe ck, dG′ senkrecht durch die Axe, so verhält sich

1) wegen der ähnlichen Dreiecke CDt und Cpx,

CD:Dt=Cp:px oder f:g=w:y′

folglich ist $px = pG' = \frac{gw}{f}$. Ueberdieß ist auch

2) das △G′bk ∽ t′DI und 3) das △bcx ∽ Dtd. Aus der Aehnlichkeit der beiden ersten folgt, daß

G′b:bk=Dt′:DI, und der andern, daß

bx:bc=Dt:Dd sey, folglich ist

G′b.bx : bk.bc = Dt.Dt′ : DI.Dd. Es ist aber

bk.bf=Lh² =DI.Dd,

folglich ist auch $G'b \cdot bx = Dt \cdot Dt' = g^2$. Diese Werthe lassen sich auch auf folgende Art bezeichnen $pG' - pb \cdot pb + px = g^2$ oder $\frac{gw}{f} - y' \cdot y' + \frac{gw}{f} = g^2$; also ist $g^2 = \frac{g^2 w^2}{f^2} - y'^2$, folglich ist $y'^2 = \frac{g^2}{f^2}(w^2 - f^2)$.

Zus. Hieraus läßt sich nun übersehen, daß den zugeordneten Durchmessern der Hyperbel dieselben Eigenschaften zukommen, als ihren Axen.

c) Von der gleichseitigen Hyperbel.

§. 76. Erkl. Bei der Hyperbel kann die zweite Axe $> = <$ die erste Axe seyn. Sind die beiden Axen einander gleich, so ist auch der Parameter von derselben Größe. In diesem Falle, wo $a = b = p$ ist, wird die Curve eine gleichseitige Hyperbel genannt.

Zus. Daher ist $ZCP = \frac{1}{2}R$ und der Asymptotenwinkel $= R$. Aus diesem Grunde pflegt man die gleichseitige Hyperbel auch die rechtwinklige zu nennen.

§. 77. Aendert man nun nach der angegebenen Bestimmung, die allgemeine Gleichung $y'^2 = px + \frac{px^2}{a}$ ab, so nimmt selbige eine weit einfachere Gestalt an

und es ist nunmehr $y^2 = px + x^2$. Rechnet man aber die Absciſſen vom Mittelpunkte an, so wird die Gleichung $y^2 - u^2 - \frac{1}{4}a^2 = u^2 - \frac{1}{4}b^2 = u^2 - \frac{1}{4}p^2$. Die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel zwischen ihren Asymptoten ist für die Potenz derselben $= \frac{1}{8}a^2$, d. h. hier ist die Potenz ein Quadrat und das Parallelogramm allemahl ein zwischen der Hyperbel und ihren Asymptoten beschriebenes Rechteck.

Anm. Man hat auch Werkzeuge, welche dazu dienen, die Kegelschnitte mit einer steten Bewegung zu beschreiben. Diese organischen Beschreibungen geschehen mittelst der Brennpunkte, worauf sich auch die Einrichtungen der Werkzeuge gründen, welche aber bei weitem nicht die Genauigkeit und Sicherheit in den Zeichnungen der genannten Linien geben, als der Zirkel für den Kreis. Die Benennungen der Brennpunkte kommen nicht allein bei der Parabel, sondern auch bei der Ellipse und Hyperbel vor. Wenn ein Lichtstrahl FM (Fig. 16.) aus einem Brennpunkt der Ellipse auf dieselbe fällt, so wird dieser Strahl nach dem andern Brennpunkte f unter dem Winkel fMF zurückgeworfen. Bei der Hyperbel hingegen liegt der zurückgeworfene Strahl in der Verlängerung von fM, so daß FM mit dieser Verlängerung einen stumpfen Winkel bildet. Der Ausdruck Hyperbel deutet den Ueberschuß an, um welchen das Rechteck aus dem Parameter in die Absciſſe größer ist, als das Quadrat der Ordinate.

§. 78. Lehns. Die Gleichung $a^x = y$ (§. 105. Algeb.) bietet die Auflösungen zweier Aufgaben dar.

Die eine ist: zu jeder gegebenen Zahl y den dazu gehörigen Logarithmen zu finden; die andere zeigt, was für eine Zahl zu jedem gegebenen Logarithmen gehört. Diese Gleichungen pflegt man durch Reihen aufzulösen, deren Gestalt sich mit einiger Aufmerksamkeit leicht bestimmen läßt. Stellt man sich daher $y > 1$, oder $y < 1$ vor, so kann man in jenem Falle $y = 1 + x$ und in diesem $y = 1 - x$ annehmen. Alsdann ist $\text{Log}\, a^x = \text{Log}(1+x)$. Diesen Logarithmen wird man sich durch eine Reihe ausdrucken können, deren Glieder nach den Potenzen von x fortschreiten, welche mit unbestimmten Coefficienten verbunden sind.

Da man nun die Reihe, den Logarithmen einer jeden Zahl ganz allgemein angeben soll, so läßt sich vorläufig beurtheilen, daß sich in dieser Entwickelung zwei Stücke werden unterscheiden lassen. Erstens muß die Reihe so beschaffen seyn, daß sich jeder Logarithme bis zu jedem verlangten Grade der Genauigkeit, entweder unmittelbar oder mit einer geringen Abänderung ihrer Gestalt, wird berechnen lassen. Zweitens aber wird in dieser Entwickelung eine gewisse Größe erscheinen, welche die Reihen in der Art modificirt, daß die Logarithmen auf ein bestimmtes System bezogen werden können. — Schon das erste Glied der Entwickelung muß die unbekannte Größe enthalten, theils wegen der Natur der Glei-

chung $\text{Log}(1+x)=Mx$, theils weil für den Fall, daß $x=0$ angenommen wird, die Reihe nicht verschwinden kann (§. 105. Zus. 3.). Man setze daher 1) $\text{Log}(1+x)=Mx+px^2+qx^3+rx^4+\ldots$ Nun lasse man x, wie die Natur dieser Größen es gestattet, zunehmen und bezeichne alsdann dieses Wachsthum mit k, so erhält man aus der obigen Gleichung 2) $\text{Log}(1+x+k)=M(x+k)+p(x+k)^2+q(x+k)^3+\ldots$ Entwickelt man nun jede der hier vorgekommenen Potenzen nach dem Binomialtheorem (§. 96. Algeb.) und zwar sämmtlich nur so weit, bis man auf den ersten Coefficienten von k kommt, indem diese Glieder zu unserer Absicht hinlänglich sind, so ist

3) $\text{Log}(1+x+k)=Mx+Mk+px^2+2px+pk^2+\ldots$
$+x^3+3qx^2k+\ldots rx^4+4rx^3k+\ldots=$
$Mx+px^2+qx^3+rx^4+\ldots k(M+2px+3qx^2+4rx^3\ldots$

4) Also ist $\text{Log}(1+x+k)-\text{Log}(1+x)=$
$k(M+2px+3qx^2+4rx^3+\ldots$ Allein diese Differenz ist vermöge der Natur der Logarithmen noch einer andern Bestimmung fähig. Es ist $\text{Log}(1+x+k)$
$-\text{Log}(1+x)=\text{Log}\left(\frac{1+x+k}{1+x}\right)=\log\left(1+\frac{k}{1+x}\right)$
(§. 105. Zus. 2.). Setzen wir nun zur bequemern Uebersicht $\frac{k}{1+x}=z$, so ist $\text{Log}\left(1+\frac{k}{1+x}\right)=$
$\text{Log}(1+z)$ und jetzt bestimmen wir diesen Werth,

wie oben $\log(1+x)$. Es ist demnach $\mathrm{Log}(1+z) = Mz+pz^2+qz^3+rz^4+\ldots$; oder wenn wir den vorigen Werth wieder herstellen,

$$5)\ \mathrm{Log}\left(1+\frac{k}{1+x}\right) =$$

$$\frac{Mk}{1+x}+\frac{pk^2}{(1+x)^2}+\frac{qk^3}{(1+x)^3}+\frac{rk^4}{(1+x)^4}+\ldots.$$

Durch die beiden Ausdrücke in 4) und 5) gelangen wir nun zu folgender identischen Gleichung:

$$k.(M+2px+3qx^2+4rx^3+\ldots =$$

$$\left(\frac{M}{1+x}+\frac{pk}{(1+x)^2}+\frac{qk^2}{(1+x)^3}+\ldots\right)k.$$ Wird diese Gleichung durch k dividirt, so findet man

$$M+2px+3qx^2+4rx^3+\ldots =$$

$$\frac{M}{1+x}+\frac{pk}{(1+x)^2}+\frac{qk^2}{(1+x)^3}+\frac{rk^3}{(1+x)^4}+\ldots$$

Diese Gleichung gilt für jeden Werth von k und x, also auch wenn $k=0$ ist. In diesem Falle aber wenn man $k=0$ setzt, wird:

$$6)\ M+2px+3qr^2+4rx^3+\ldots = \frac{M}{1+x}.$$ Also ist

$(M+2px+3qx^2+\ldots)(1+x)=M$. Die wirkliche Multiplication gibt

$$M=M+(2p+M)x+(3q+2p)x^2+(4r+3q)x^3+\ldots$$

oder $(2p+M)x+(3q+2p)x^2+(4r+3q)x^3+\ldots=0$.

Dividirt man nun diese Gleichung durch x und setzt als-

dann $x=0$, so erhält man $2p+M=0$, folglich $2p = -M$ und $p = -\frac{M}{2}$. Für jeden andern Werth von x erhält man

$(3q+2p)x+(4r+3p)x^2+(5s+4q)x^3=0$ und wenn man die vorige Operation wiederholt, findet man $3q+2p=0$, folglich $q=-\frac{2}{3}p=\frac{1}{3}M$; eben so findet man $r=-\frac{3}{4}q=-\frac{1}{4}M$; $s=-\frac{4}{5}r=\frac{1}{5}M$ ꝛc. Schreibt man nun die hier für die Coefficienten gefundenen Werthe, in die obige Reihe, so erhält man

7) $\text{Log}(1+x)=Mx-\frac{1}{2}Mx^2+\frac{1}{3}Mx^3-\frac{1}{4}Mx^4+\ldots= M(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\ldots)$

Dieses ist die Hauptreihe zur Berechnung der Logarithmen. Ausser den Potenzen von x, deren Coefficienten nun bestimmt sind, zeigt sich hier noch der erste Faktor M in der vorigen Bedeutung. Er ist leicht von der Reihe zu unterscheiden, läßt sich aber nicht von ihr trennen. In der That ist der Werth desselben, so lange für das System noch keine Grundzahl festgesetzt worden ist, völlig unbestimmt, und dadurch ganz unserer Willkür überlassen, wodurch eine unbegrenzte Zahl von logarithmischen Systemen möglich wird. Indeß läßt sich doch so viel übersehen, daß, bei irgend einer Annahme des Faktors M, die darnach berechneten Logarithmen durch ein gemeinschaftliches Band zu einem Ganzen ver-

bunden werden und dadurch ein System bilden; daß also auch die Logarithmen durch einen andern Werth von M, auf ein anderes System gebracht werden; daß die Logarithmen aller Zahlen, zu so verschiedenen Systemen sie auch gehören mögen, immer in einem bestimmten Verhältnisse gegen einander stehen, und endlich, daß dieser Faktor mit der Grundzahl a in einer solchen Verbindung steht, daß der angenommene Werth von a die Bestimmung von M und umgekehrt der angenommene Werth von M die Bestimmung von a, zur Folge hat. Man kann daher den Zahlenwerth von M im allgemeinern Sinne wie oben, den logarithmischen Modulus nennen.

§. 79. Die einfachste Gestalt aber erhält diese Reihe aus der einfachsten Voraussetzung, wenn man $M = 1$ annimmt. In diesem Falle ist $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots$ Die nach dieser Annahme berechneten Logarithmen heißen die natürlichen oder hyperbolischen, im Gegensatz der übrigen, welche nach einer andern Voraussetzung von M berechnet und künstliche Logarithmen genannt werden. Jene wollen wir daher zum Unterschiede der andern mit log. die Briggischen wie vorhin mit Log und die übrigen, falls sie vorkommen, mit Log. art. bezeichnen.

§. 80. Vergleicht man nun die beiden Reihen

Log $(1+x)$ und log $(1+x)$, so wird man finden, daß Log$(1+x)=$M log$(1+x)$ sey. Diese Gleichung gibt zu erkennen, daß man den Logarithmen jeder Zahl $y=1+x$, jedes Systems aus dem natürlichen Logarithmen dieser Zahl finden kann, wenn man dieselbe mit dem Modulus des künstlichen multiplicirt, und daß man die natürlichen Logarithmen aus jedem künstlichen System berechnen kann, wenn man diese durch den Modulus dividirt.

§. 81. Will man nun die gefundene Reihe $M(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\ldots)$, welche allgemein betrachtet, völlig richtig ist, und welche den Zusammenhang aller Zahlen mit ihren Logarithmen deutlich übersehen läßt, zur wirklichen Berechnung der Logarithmen gebrauchen, so zeigt sich schon bei den ersten ganzen Zahlen die große Unbequemlichkeit, daß sich diese Reihe sehr langsam nähert. Indeß kann man sie doch zur Entwickelung einer andern Reihe benutzen, vermittelst welcher die Berechnung der Logarithmen leichter und bequemer geschehen kann.

Man bemerke in dieser Absicht, daß man auch für $y=1-x$ durch die Wiederholung der vorigen Rechnung nur x verneint genommen oder Log $(1-x)$ $=$ $-M(x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4\ldots)$ findet. Ziehet man nun diese Reihe von der vorigen ab, so erhält man

$2M(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \ldots) =$

$\text{Log}(1+x) - \text{Log}(1-x) = \text{Log}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ (§. 105. Zus. 2. Alg.). Für $\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ ist die Reihe $=$ $2(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \ldots)$.

Um nun diese Reihe zur Berechnung einer jeden bejahten Zahl n zu gebrauchen, so setze man $n = \frac{1+x}{1-x}$, hieraus findet man $x = \frac{n-1}{n+1}$, also wird x kleiner als 1 und folglich die Reihe eine schnellere Annäherung gestatten. Man kann sich derselben auch bedienen, den Modulus M des Briggischen, d. i. desjenigen Systems zu bestimmen, wovon die Grundzahl hier $n = 10$ ist, folglich $x = \frac{n-1}{n+1} = \frac{9}{10}$. Daher ist die daraus entspringende Reihe $\text{Log } 10 = 2M\left[\frac{n-1}{n+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^3 + \ldots\right]$ oder da $\text{Log } 10 = 1$ ist, so findet man $1 = 2M\left(\frac{9}{11} + \frac{9^3}{3.11^3} + \frac{9^5}{5.11^5} + \ldots\right)$.

Also ergibt sich hieraus $M = \frac{1}{2} : \left(\frac{9}{11} + \frac{9^3}{3.11^3} + = \right.$

$$\frac{0{,}5}{\frac{9}{1} + \frac{9^3}{3.11^3} + \frac{9^5}{5.10^5} +} = 0{,}4342944 \ldots$$

Da aber bei merklich wachsenden Zahlen für n, die

Annäherung immer langsamer wird, so kann man der Reihe eine, den Absichten gemäß, noch schicklichere Gestalt geben, wenn man $\frac{1+x}{1-x} = \frac{n}{n-1}$ annimmt und also für x den Werth $\frac{1}{2n-1}$ in die Reihe schreibt. Alsdann wird die erste Hälfte der Gleichung $\log\left(\frac{n}{n-1}\right) = \log n - \log(n-1)$, d. h. sie gibt die Differenz der Logarithmen zweier auf einander folgenden Zahlen n und n−1 an; und die andere ist $= 2\left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{3(2n-1)^3} + \frac{1}{5(2n-1)^5} + \ldots\right)$ Durch diese Entwickelung kann man nun die natürlichen Logarithmen nach der Reihe berechnen. Setzt man nun $n = 2$, so ist $\log 2 - \log 1 =$ $\log 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \ldots\right)$. Ist dieser Logarithme gefunden, so ergibt sich auf dieselbe Art $\log 3 =$

$$\log 2 + 2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} + \frac{1}{7.5^7} + \ldots\right).$$

Der Logarithme von 4 ist $= 2\log 2$, der von $n=5$ ist $\log 5 = \operatorname{Log} 4 + 2\left(\frac{1}{9} + \ldots\right.$ Diese Reihen nähern sich desto mehr, je größer die Zahlen sind,

deren Logarithmen gefunden werden sollen; und es lassen sich aus ihnen Ausdrücke ableiten, wodurch das Geschäft beträchtlich abgekürzt werden kann. Indeß liegt diese Entwickelung hier ausser meinem Zwecke und es ist für denselben hinreichend, die Wichtigkeit und den Zusammenhang dieser Lehren gezeigt zu haben.

§. 82. Daher bemerke ich nun noch, daß wenn die natürlichen Logarithmen berechnet worden sind, man auch sehr leicht den Modulus jedes künstlichen Systems aus der oben angeführten Gleichung $\text{Log}(1+x) = M \log(1+x)$ angeben kann. Denn nimmt man für $1+x$ den Zahlenwerth der Grundzahl a eines künstlichen Systems, so findet man $\text{Log}\,a = M \log a$ und weil $\text{Log}\,a$ in dieser Voraussetzung $= 1$ ist, so ist $M = \frac{1}{\log a}$. Daher ist der Modulus der briggischen Logarithmen, $= \frac{1}{\log 10} = \frac{1}{2{,}302.}$ $= 0{,}43429 \ldots$ und $\text{Log}\,M = 0{,}63778431 13 \ldots$ Man findet also die Logarithmen des Briggischen Systems, wenn man diejenigen, welche zum natürlichen gehören und nach der obigen Anweisung als berechnet angenommen werden können, mit $0{,}4342 \ldots$ multiplicirt.

§. 83. Bezeichnet man mit e die Grundzahl des natürlichen Systems, so ist $\text{Log. artif}\, e = M \log e$

$= M$. Daher ist auch Log. artif. $(1 + x) =$ Log. art. e. log $(1 + x)$. Daher findet man die natürlichen Logarithmen, aus den Briggischen, wenn man diese mit $\frac{1}{\log a} = \frac{1}{\log 10} = 2{,}3025 \ldots$ multiplicirt.

Aus der Betrachtung der Eigenschaften der natürlichen Logarithmen, aus der einfachen Gestalt ihrer Reihen, aus der Verbindung derselben mit jedem andern System, läßt sich leicht beurtheilen, daß ihre Kenntniß, wie wir bereits aus dem obigen ersehen, die Untersuchung aller hierher gehörigen und damit verwandten Lehren erleichtern muß. Und in der That liegen die natürlichen Logarithmen nicht nur vielen Lehren der höhern Analysis zum Grunde, sondern sie sind auch in der Anwendung in der Mechanik, Hydraulik ꝛc. völlig unentbehrlich. Die folgende Betrachtung wird dazu dienen, von diesen Lehren eine nützliche Anwendung zur Berechnung der Hyperbel zu machen.

Ausserdem läßt sich aus der Beschaffenheit der oben angeführten Reihen am leichtesten beurtheilen, wie weit man berechtiget ist anzunehmen, daß die Unterschiede der Zahlen sich sehr nahe wie ihre Logarithmen verhalten, zumahl wenn die Zahlen sehr groß und ihre Differenzen sehr klein sind. Nach die-

ser kleinen Abschweifung wollen wir nun zu unserm vorigen Gegenstande wieder zurückkehren.

§. 84. Wenn $CO = OL = h$, $OZ = x$, $ZM = y$ und der Asymptotenwinkel $gCh = \psi = 2\varphi$, so ist $CZ = h + x$ und läßt man aus M einen Perpendikel p auf die Asymptote herab, so ist derselbe für den Halbmesser eins, $= y \sin \psi$. Ausserdem ist $CZ . ZM = LO^2$, d. i. $(h+x)y = h^2$, folglich $y^2 = \frac{h^2}{h+x}$ eine Gleichung für die Hyperbel, zwischen ihren Asymptoten, wenn O der Anfangspunkt der Abscissen ist. Durch die Division findet man $y = h - x + \frac{x^2}{h} - \frac{x^3}{h^2} + \ldots$ Daher ist der Perpendikel $p = y \sin \psi = \sin \psi \left(h - x + \frac{x^2}{h} - \frac{x^3}{h^2} + \ldots\right)$. Theilt man nun die Abscisse in eine gewisse Anzahl gleicher Theile, deren jeder von neuem halbirt wird, so kann man die Abscissenlinie, weil die Theilung unbegrenzt fortgeht, in eine unzählige Menge m gleicher Elemente zerlegen. Ziehet man nun durch jeden Theilungspunkt z zur Cg eine Parallele, so zerfällt dadurch die hyperbolische Fläche in eben so viel Elemente. Nun ist aber das Prlgr. $ZMzm = p . zZ = \sin \psi \left(h \frac{x}{m} + x . \frac{x}{m} + \frac{x^2}{h} . \frac{x}{m} - \frac{x^3}{h^2} . \frac{x}{m} + \ldots\right)$. Setzt man nun $m = \infty$, so ergibt

sich hieraus die Summe aller Elemente von O bis Z, deren allgemeines Glied durch $zm'ZM$ vorgestellt werden kann. Diese Summe ist $\sin\psi\left(hx - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3h} - \frac{x^4}{4h^2} + \ldots\right) = h^2 \sin\psi\left(\frac{x}{h} - \frac{x^2}{2h^2} + \frac{x^3}{3h^3} - \frac{x^4}{4h^4} + \ldots\right) = h^2 \sin\psi \log.\left(1 + \frac{x}{h}\right) = h^2 \sin\psi \log\frac{CZ}{LO}$. Dieser Ausdruck dient zur Berechnung hyperbolischer Flächenräume. Man vergl. Vega's Vorlesungen über die Math. Th. 2. §. 669. S. 456. Vierte Aufl.

Zus. Bei der gleichseitigen Hyperbel schließen die Asymptoten einen rechten Winkel ein, daher ist $\psi = 90°$, folglich $\sin\psi = 1$, daher ist der Flächeninhalt des Stückes $OLMZ = h^2 \log\frac{CZ}{LO}$. Hieraus ergibt sich $\frac{OLMZ}{h^2} = \log\frac{CZ}{LO}$. Nimmt man nun $h = LO = 1$ an, so ist $OLMZ = \log CZ$. Hieraus siehet man nun, daß bei einer gleichseitigen Hyperbel die mit LO parallel abgeschnittenen Flächenräume $LOl'o$, $LOm'z$, LOMZ für $CO = 1$, dazu dienen können, die natürlichen Logarithmen von Co, Cz, CZ anzugeben. Aus diesem Grunde pflegt man die natürlichen Logarithmen auch die hyperbolischen zu nennen, wiewohl man jedes logarithmische System auf eine ähnliche Art darstellen kann, wenn man den Sinus des Winkels ψ so groß als den Modulus

lus desjenigen Systems annimmt, in welches die natürlichen Logarithmen verwandelt werden sollen.

§. 85. Aufg. Den körperlichen Inhalt einer Hyperboloide zu finden.

Aufl. Bezeichnet r den Halbmesser eines mit Pm und p den Halbmesser eines mit Lg beschriebenen Kreises, und h die Länge von LP, so ist der verlangte Inhalt $K = \frac{h}{3}(r^2 + pr - 2p^2)\pi$. Denn zeichnet man die Linien, wie vorhin in die Figur, so ist $nN . Nm = gL^2$. Errichtet man aber aus dem Durchschnittspunkte des kleinern Kreises aus dem gemeinschaftlichen Durchmesser, eine senkrechte Linie p, und verlängert selbige bis an den Umfang des größern, so ist $p^2 = nN . Nm$, folglich ist $p^2 = gL^2$, folglich $p = gL$ und die zu diesen Halbmessern gehörigen Kreise sind einander gleich. Es ist aber $p^2 = r^2 - \varrho^2$ und $p^2\pi = (r^2 - \varrho^2)\pi = gL^2 . \pi$. Da nun diese Gleichung für jede Länge von CP Statt findet, so ist der Cylinder, dessen Halbmesser die Grundfläche gL und dessen Höhe LP bezeichnet, so groß als der körperliche Raum, welcher von der äussern Oberfläche des abgekürzten Kegels ghnm und der Hyperboloide NLM begrenzt wird. Durch diese Betrachtung rechtfertiget sich nun, die oben angegebene Gleichung für die Hyperboloide.

Hauptinhalt
der Theorie der Kegelschnitte.

	§§.	Seite.
I. Abschn. Von der Parabel	1	153
a) Einleit. b) ger. Linie. c) Kreislin.	1—8.	153—165
Allg. Gleich. der Kegelschnitte	9—11.	165—169
Haupteigenschaften Zeichnung der Parabel	11—16.	169—176
Die Tangente, Subtangente, Normale und Subnorm der Par. zu finden	17—23.	176—183
Von den Flächenräum. parab. Stücke	23—27.	183—191
Von der Paraboloide	28.	191—193
II. Abschn. Von der Ellipse	29.	193
Entwickelung einiger Gleichungen für die Ellipse	30.	
Verzeichnung der Ellipse	39.	203
Die Tangente, Subtg., Normale und Subnorm. der Ellipse zu finden	43. 44.	206—213
Von den Durchmessern der Ellipse	45—50.	213—220
Vergl. der Parabel und Ellipse	51—53.	220—225
Von der Berechnung der Ell.	54.	225—227
Von der Ellipsoide	55.	227. 228
III. Abschn. Von den Haupteigenschaften der Hyperbel	56—65.	228—241
Tangente, Subtangente ꝛc. der Hyp. zu finden	64. 65.	238—241
Von den Eigenschaften der Hyperb. in Absicht ihrer Asymptoten	66—70.	241—247
Zeichnung der Hyperbel	72.	
Von der gleichs. Hyperb.	76.	251
Theorie der Logarithmen	78—83.	252—263
Von der Berechnung der Hyp.	84.	264
Von der Berechn. d. Hyperboloide	85.	265

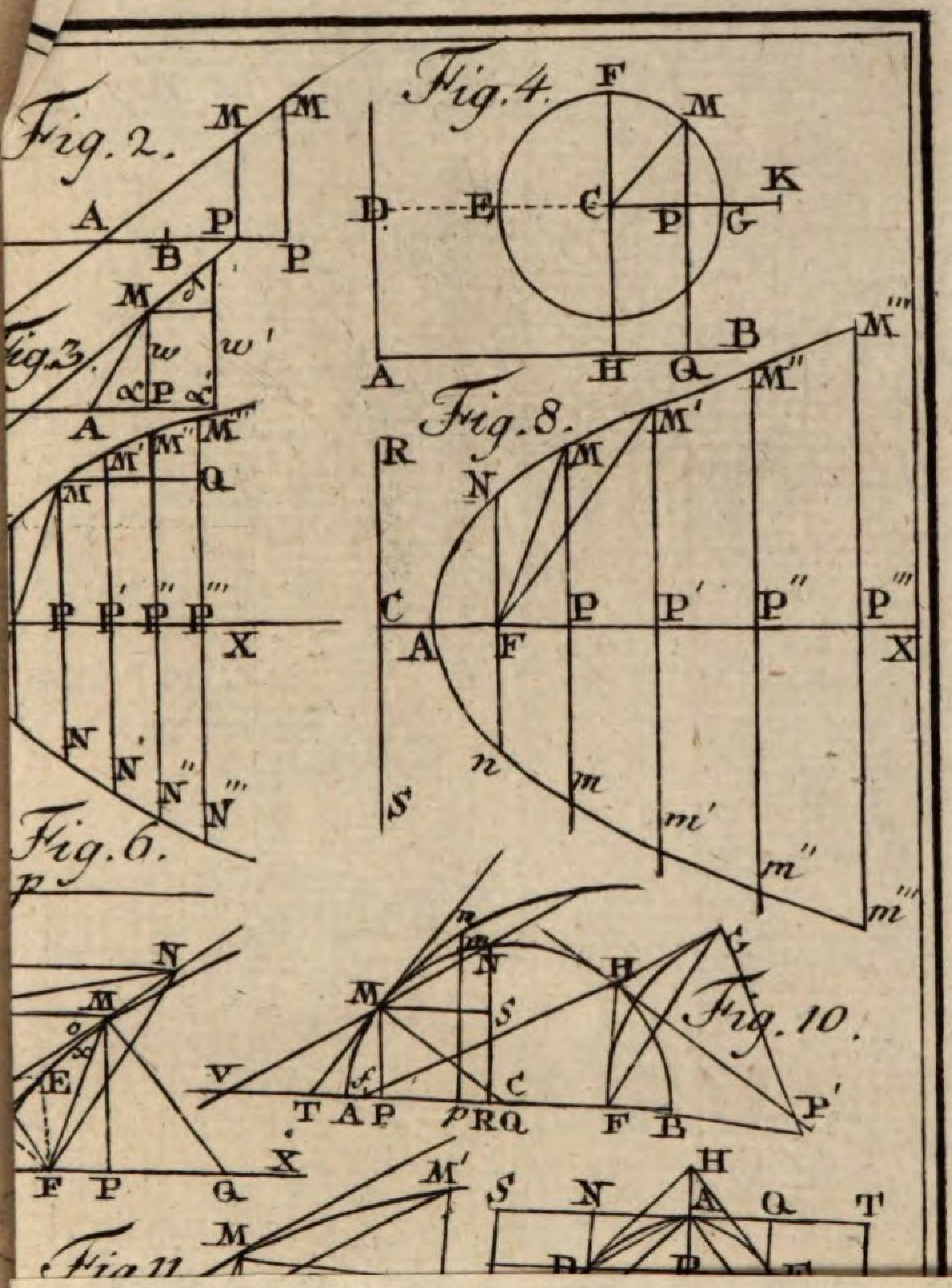
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 6.
Fig. 8.
Fig. 10.

Inhaltverzeichniß des ersten Theils.

	§§.	Seite
Von den Grundbegriffen der Mathematik.		
Reine Mathematik — Charakter — Zweck und Methode dieser Wissenschaft	1—3.	1—2
Eintheilung d. M. in die reine und angewandte	4—6.	3—4
Nähere Bestimmung der Theile d. M.	7—8.	4—5
Zweige der angewandten Mathem.	9—11.	6—8

Arithmetik.

Erste Abtheilung.

I. Abschnitt.		
Von den Grundbegriffen der Zahlen und deren Ursprung aus der Zusammensetzung und Theilung der Einheit.		
Einleitende Begriffe	1.	8—9
Die Lehren der Arithmetik	2.	9
lassen sich auf alle Gegenstände der Geometrie anwenden. Nahmen, Zei=		

	§§.	Seite.
chen, Ursprung der Zahlen aus der Einheit — Eintheilung der Zahlen in benannte und unbenannte, ganze und gebrochene	2—5	9—13
II. Abschnitt.		
Von der Art und Weise, wie Zahlen geschrieben, geordnet und ausgesprochen werden	6—22.	13—23
Bestimmung der Zahlen aus der Größe, Menge der Einheiten und aus ihrer Stellung in Bezug auf das Einerzeichen	13	23
Von den bekannten Rechnungsarten mit ganzen Zahlen.		
III. Abschnitt. Von der Addition	17—20.	24—29
IV. Abschnitt. Von der Subtraction	21—23.	29—35
V. Abschnitt. Von der Multiplication	24—26.	36—43
VI. Abschnitt. Von der Division	27—30.	43—58
VII. Abschnitt. Von einigen Eigenschaften der ganzen Zahlen.		
Von den Primzahlen; zusammengesetzten, geraden, ungeraden rc. Zahlen	31—33.	58—60
Von den einfachsten Kennzeichen der Zerfällung gegebener Zahlen, in ihre Faktoren	34. 35.	60—64

Zweite Abtheilung.

I. Abschnitt.		
Von den Eigenschaften und Veränderungen der Brüche . . .	36	64
Entwickelung ihrer Haupteigenschaften	36—38.	64—69

	§§.	Seite.
Eintheilung der Brüche . .	38.	69
Betrachtung derselben als Quotienten	39.	69 70
Sinn und Bedeutung des Zeichens $\frac{1}{\infty}$ aus den Grundvorstellungen gebrochener Zahlen abgeleitet . . .	40.	70
b) Von der Reduktion der Brüche	42.	77
Bestimmung des größten gemeinschaftlichen Theilers . . .	43.	78—80
c) Von der Addition und Subtraction der Brüche	44—48.	81—89
d) Von der Multiplication und Division derselben	49.	89—92
II. Abschnitt. Theorie der zehntheiligen Brüche	51. 52.	93—96
Addition der zehntheiligen Brüche	53.	96
Subtraction der zehntheil. Brüche	54.	97
Multiplication — und verkürzte Multipl.	55. 56.	98—100
Division — und verkürzte Division	57. 58.	101—104
Von der Verwandelung der gewöhnlichen Brüche in zehntheilige 2c.	59 60.	104—107
III. Abschn. Von den Rechnungsarten mit benannten ganzen und gebrochenen Zahlen des decadischen Systems und einigen dazu gehörigen Beispielen.		
Vorläufige Erläuterungen	61.	105—109
Von der Addition ganzer und gebrochener 2c. Zahlen . . .	63.	110—112
Von der Subtraction . .	64.	112—114

	§§.	Seite
Von der Multiplication	65.	114—116
Von der Division	99.	117 118

Dritte Abtheilung.

Von der Buchstabenrechnung und Algebra.

	§§.	Seite
I. Abschn. a) Natur und Zweck dieser Wissenschaft	1	121—123
b) Von der Beschaffenheit entgegengesetzter Größen	2—4.	123—124
Auseinandersetzung der hierher gehörigen Begriffe	4.	124—125
Daraus hergeleitete Folgerungen	5.	125 126
Von den gebräuchlichsten Zeichen — Gleichungen — Coefficienten — Potenzen — Exponenten — Einschließungszeichen	6—8.	128—130
Von den ersten allgemeinen Rechnungsoperationen und deren Erläuterung durch Beispiele.		
c) Von der allgemeinen Addition	9. 10.	130—133
d) Von der allgemeinen Subtraction	11. 12.	133—136
e) Von der allgemeinen Multiplication	13. 14.	137
Erläuterung der Vorzeichen	15. 16.	137—141
f) Von der allgemeinen Division	17. 18.	141—145
g) Von der allgemein. Bruchrechnung	19—21.	145—148
II. Abschn. Von der Bildung der Potenzen, dem Ursprunge und der Grundform der Wurzelgrößen und deren allgemeinen Eigenschaften.		

	§§.	Seite.
a) Von den Grundbegriffen der Potenzen und Wurzelgrößen =	22—24.	148—150
b) Von der Addition und Subtraction der Potenzen = =	25.	150—151
c) Von der Multiplication der Potenzen	26.	151
Deren Anwendung auf Zahlengrößen	26.	152—154
Von den allgemeinen Eigenschaften der Potenzen und Wurzelgrößen	27.	155—159
d) Von der Division der Potenzen — der Bedeutung verneinter Exponenten — Von den Potenzen, deren Exponent o ist — Nähere Bestimmung der Werthe $\frac{1}{0}$ und $\frac{0}{0}$. Darstellung d. Bruches $\frac{a}{1-x}$ = =	28.	159—162
Die aus dieser Division entspringenden Reihen = = = =	28.	162—165
Einige merkwürdige Divisionen	29.	166—168
III. Abschn. Von den Gleichungen des ersten Grades = = =	30.	168
Allgemeine Bemerkungen über Buchstabenrechnung, Algebra und Analysis — Geist dieser Methode	31. 32.	169 170
Darstellung und Entwickelung der einfachen Gleichungen = =	33. 34.	170—174
Auflösung der Gleichungen des 1sten Grades = = = =	35—38.	174—178
IV. Abschn. Von den Kettenbrüchen	39.	
Von ihrem Ursprunge, ihrer Entwikkelung = = = = =	41.	178—184

	§§.	Seite.
Von dem Verfahren auf annähernde Brüche zu gelangen — Anwendung dieser Theorie auf die Bestimmung annähernd Werthe für gr Zahlen	40—45.	180—192
V. Abschn. a) Von den arithmetischen Verhältnissen und Proportionen	45—47.	192—198
b) Von den geometr. Verhältnissen und Proportionen ⸗ ⸗	48—52.	195—200
c) Von der Zusammensetzung der Verhältnisse ⸗ ⸗ ⸗ ⸗	53.	200—202
Anwendungen der einfachen und zusammengesetzten Verhältnisse auf verschiedene Rechnungsaufgaben des gesellschaftlichen Lebens ⸗ ⸗	54.	203—205
Regel de tri, de quinque ꝛc. — Kettenregel, Gesellschafts⸗Alligations⸗Rechnung ⸗ ⸗ ⸗ ⸗ ⸗		
d) Weitere Ausführung der Aufl. einfacher algebraischen Gleichungen mit einer unbekannten Größe ⸗	55.	206—210
VI. Abschn. Von den bestimmten Gleichungen des ersten Grades mit zweien oder mehreren unbekannten Größen	56.	210—212
Allgemeine Formeln u Aufgaben dazu	57—59.	212—220
VII. Abschn. Von der Bildung neuer Potenzen und den Rechnungsarten mit Wurzelgrößen.		
a) Von der Bildung neuer Potenzen	60.	220
b) Von der Ausziehung der Wurzeln überhaupt ⸗ ⸗ ⸗ ⸗ ⸗	61.	220—224

	§§.	Seite.
c) Von der Berechnung der Quadratwurzel	62—66.	224 - 232
den ganzen und gebrochenen Zahlen- und Buchstaben-Ausdrücke	67.	233
d) Von der Berechnung der Cubikwurzel	68—71.	233—240
e) Von den Rechnungsarten mit Wurzelgrößen	72—76.	240—246
f) Von den irrational- und unmöglichen Größen	77—83.	246—252
VIII. Abschn. Von den quadratischen Gleichungen.		
a) Von der Auflösung reiner quadr. Gleichungen	84. 85.	252—257
b) Von der Aufl. vollständ. quadr. Gl., die allgemeine Form dieser in Hinsicht ihrer Vorzeichen — eine Folge von Zeichen führt auf einen verneinten, eine Abwechselung auf einen bejahten Werth. — Der Coefficient des 2ten Gliedes ist die entgegengesetzter allgeb. Summe, das 3te das Produkt beider Wurzeln. — Jede quadr. Gl. hat nur 2 Werthe welche beide möglich oder unmöglich sind. — Kennzeichen davon	86—88. 86. 87. 87.	257—267 256 260 261
Entwickelung des Ausdruckes $\sqrt{(a+\sqrt{g})}$	88.	262
Die Aufl. einiger Gl. vom 4ten Grad geschehen wie bei den quadr. Gl.	88.	263—267
c) Von den einfachen unbestimmten Gleichungen	89.	267—268

	§§.	Seite.
Von den unbestimmten quadr. Gl.	90.	268—269
IX. Abschn. Von den Permutationen, Combinationen und Variationen	91—95.	270—273
Entwickelung des Binomialtheorems	96.	273—277
X. Abschn. Von der Entwickelung einiger einfachen Reihen.		
a) Von der arithmet. Progression	97—101.	277—282
b) Von der geometr. Progression	102. 103.	282—284
Fundamentalgleichung der Reihen mit unbestimmten Coefficienten ꞉	104.	284
c) Von den allgemeinen Eigenschaften der Logarithmen ꞉ ꞉ ꞉	105.	285—287
Der Logarithme eines Produk. ist der Summe der Log. der Faktoren, eines Quotienten (oder Bruches) der Differenz des Log. des Zählers weniger dem Log. des Nenners gleich ꞉c.	105.	285—288
Bemerkung über die Log.꞉Systeme		288

Dritte Abtheilung.

Die ebene Geometrie.

Von der Natur und Beschaffenheit der in der Geometrie vorkommenden Gegenstände ꞉ ꞉ ꞉	1—8.	289—295
I. Abschn. Von den geraden Linien und ebenen Winkeln ꞉ ꞉ ꞉	9—11.	295—297
Grunds. zur Prüfung der Gleichheit ausgedehnter Größen ꞉ ꞉	12.	297
Theorie der Parallelen ꞉ ꞉	16—21.	301—317
Vom Ursprunge des Kreises nebst einigen vorläufigen Begriffen	23—25.	307—312
II. Abschn. Von der Congruenz der Drei꞉		

	§§.	Seite
ecke u. den davon abhängigen Aufg.	26—46.	312—326
Theilung gerader Linien auf dem Felde	31.	317
Ziehung senkrechter Linien auf d. Felde	33.	
Bestimmung parall. Linien auf dem Felde	45.	326
III. Abschn. Von der Bestimmung der Winkel am äußern und innern Umfange geradliniger ebener Figuren	47—51.	327—332
IV. Abschn. Von der Vergleichung der Parallelogramme, Dreiecke, Verwandlung geradlin. eb. Figuren u. den damit verwandten Lehren	52—64.	332—353
Bem. üb. d. Zeichnung großer Rechtecke und Benützung der Trapezien		334 335
Von der Verwandelung ebener geradl. Figuren nach vorgeschriebenen Bedingungen — eine nöthige Erforderniß zur Theilung der Figuren durch Zeichnung	59—61.	342—348
Von der Bestimmung rechter Winkel auf dem Felde und deren Anwend.	62	351
V. Abschn. Betrachtung gerader Linien u. Winkel in und an dem Kreise	65—81.	353—369
Von der durch Kreisbogen bestimmten Größe der Winkel ꝛc.	65—67.	353—356
Von der Kreistangente	68—70.	356—357
Vergl. d. W. am Mittelp. u. Umf. ꝛc.	70—76.	357—364
Vergl. des Wink., welchen eine Tangente und Sehne einschließen, mit dem Winkel am Mittelpunkte oder Umfange Bew. I. II. III. IV. V. VI. nebst den davon abhängigen Aufg.	77—79.	368—376

	§§.	Seite.
Pothanotsche Aufgabe . .	80.	367—368
VI. Abschn. Von den wechselseitig in u. um einander beschriebenen regulären Polygonen und Kreisen .	82—92.	369—384
Eigenschaften regulärer Polygone nebst Bestimmung der Centri- und Polygonwinkel . . .	84.	371—373
Zeichn. u. Berechn. d. Polygonseite ꝛc.	85.	373—375
Seite des reg. Viereckes, Achteckes und deren Abstand vom Mittelpunkt	86.	375 376
Bestimmung der Seite zu einer Redoute	87.	377
Zeichnung u. Berechn. des gleichseit. Dreieckes, des regulären Sechseckes, Zwölfeckes ꝛc. . . .	88.	379
VII. Abschn. Von den Verhältnissen und Proport., nebst einig. Anwend.	93—102.	384—395
Theilung eines Dreieckes durch Zeichnung in eine gewisse Anzahl gleicher Theile mit Berücksichtigung der dabei vorkommenden Umstände. — Die Theilungslinien gehen aus der Spitze — erhalten verschiedene Lagen — aus einem in der Seite liegenden Punkt	94—97.	386—389
Einrichtung und Anfertigung des verjüngten Maßstabes . .	102.	393 394
VIII. Abschn. Von der Aehnlichkeit der Dreiecke und Figuren ꝛc.	103—125.	394—430
Anwendung des 104. §. zur Bestimmung der rückwärts verlängerten Capitallinie eines Bollwerkes	105.	397
Von der Theilung gerader Linien ꝛc.		

	§§.	Seite.
nach gegebenen Verhältnissen (Zus.)	112.	405
— wenn der letzte Theil nicht ausdrücklich angegeben ist nach (Fig. 56)	112.	406
Bestimmung der Höhe eines Gegenstandes I) vermittelst des Schattens, II) eines Planspiegels, III) bloßer Stäbe — Anm. üb. die Messung fortlaufender Höhen — vermittelst eines	113.	408—410
Verticalbogens . . .	113.	411
Bestimmung der Entfernung einer Batterie von einer Schanze	114.	411 412
Von der Messung unzugänglicher horizonlalen Entfernungen:		
Aus einem Stationspunkte, von welchem man nach den Endpunkten der unzugänglichen Linie sehen und messen kann. I) Vermittelst d. Meßtisches	115.	413
II) Vermittelst der Kette und Stäbe	115.	414
Wenn man vom Stationspunkte nach beiden Endpunkten der unzugänglichen Linie sehen, aber nur zu einem hinkommen kann. I) Mit d. Meßtisch	116.	415
II) Mit Kette und Stäben	116.	415
Auflös. der Aufg. 115. I) M. d. Meßtische	117.	416
II) Ohne Veränderung d. Meßtisches	117.	416
III) Mit Stäben und der Kette	117.	417
Vorläufige Bestimm. d. Flußbreite	118. 117.	417 418
Von der Aehnlichkeit der Figuren, worauf die Aufnahme ganzer Felder ꝛc. beruht	121 — 123.	420—426
Von der Aehnlichkeit der Kreise	124.	426—428

	§§.	Seite.
Annähernde Verhältnisse des Durchmessers zum Umfange = =	125.	428—430
IX. Abschn. Von der Vergl. der Flächenräume eb. geom. Figuren und deren Berechnung = =	126—136.	430—451
Berechnung jeder geradlinigen durch Diagonale in Dreiecke getheilten Fig.	130.	437
Aufl. ders. Aufg. mittelst der Trapezien	130.	437 438
Allgemeine Formel ihrer Berechnung	130.	438
Anwendung obiger Vorschriften auf krummlinige Figuren = =	130.	439
Bequemlichkeit der Theilung und Abkürzung der Rechnung, wenn der Abstand aller Parallelen von einander von gleicher Größe ist. Allgemeine Formel zur Berechnung	130.	440
Berechnung eines regulären Polygons	130.	440
Theilung eines Dreieckes in jede verlangte Anzahl gleicher Theile, wenn die Scheidungen mit einer Seite parallel laufen, 1) durch Rechnung	133.	443 444
2) durch Zeichnung = =	133.	445
3) nach gegebenen Verhältnissen	133.	445
Ein Trapezium auf die Grundlinie eines △ zu setzen, das demselben gleich ist ꝛc. = = =	134.	447 448
Von einem gegebenen Trapezium ein bestimmtes Stück abzuschneiden	135.	449 450
Eine eb. geradl. Fig. in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen	136.	450 451

X. Ab=

	§§.	Seite.
X. Abschn. Von den Proportionen ꝛc. am Kreise ꞉ ꞉ ꞉ ꞉	137.	452
Von der Gleichh. d. Rechtecke aus den Abschnitten der durch den Kreis gezogenen geraden Linien ꞉	137. 138.	452—454
Ptolemäischer Lehrsatz ꞉ ꞉	139.	454
Beschreibung eines regulären 5, 10, 15eckes ꝛc. Berechnung der Seiten, Abstandes vom Mittelpunkt ꝛc.		
Berechnung des Umfanges u. Flächeninhaltes, Ausschnittes, Abschnittes eines Kreises aus dem gegebenen Halbmesser ꝛc. oder des Halbmessers aus dem Inhalt oder Umfange ꝛc.	143.	459—462
Vergl. der Bogen und Winkel	144. 145.	462—464
Vergl. der mondförm. Stücke des Hippokrates aus Chios ꞉	146.	464

Zweiter Theil.

Erste Abtheilung.

Von der ebenen Trigonometrie.

I. Abschn. a) Eintheilung der Trig. — Unterscheidung der ebenen u. sphär. Trig.	1.	1
Vorzug der Berechn. geradlin. Dreiecke vor deren Verzeichnung in Bezug auf die ausübende Geometrie ꞉	1.	2
Erklärung der trigonom. Linien ꞉	2.	2
Von dem Ursprunge dem Fortgange, dem Maximo, der Abnahme u. den verschwindenden Werthen der Sinus und Cosinus ꞉ ꞉ ꞉ ꞉ ꞉	3. 4.	3—9
Von den Veränderungen und den Vorzeichen der Sinus und Cosinus in den		

	§§.	Seite.
vier Kreisquadranten	5. 10.	9—16
Von den übrigen trig. Linien	7—9.	11—14
b) Von der Berechnung der trigonom. Linien einfacher Bogen oder Winkel und deren Erläuterung durch Beispiele	11.	16—18
Aus den Vorzeichen und den Veränderungen der Sinus und Cosinus, lassen sich die Vorzeichen und Werthe der übrigen trig. Linien durch Rechnung finden	11.	18—20
Aus dem Cosinus eines Bogens den Sinus und Cos. seiner Hälfte zu finden	12.	21—22
c) Von den trigonom. Linien zusammengesetzter Bogen		
Hauptsatz zur Bestimmung der Sinus und Cos. der Summe u. Diff. zweier Bogen	13.	22 24
Einige merkwürdige Folgerungen daraus	13.	24 25
Das Verhältniß der Summe zur Differenz der Sinus zweier Bogen, ist dem Verhältniß der Tangenten der halben Summe und Differenz eben dieser Bogen gleich	13.	25 26
Vergleichung der Tangenten	14.	26 27
II. Abschn. Von der Aufl. der Aufg. geradliniger Dreiecke überhaupt.		
a) Hauptbedingung zur Berechnung aller eben. geradlin. Dreiecke	15.	27
Hauptf. der Trigonometrie	16.	28 29
b) Von der Berechnung rechtw. Dreiecke, sowohl der Seiten u. Wink., als des Flächeninhaltes	17.	30—33
c) Von der Berechnung des gleichschenkligen Dr.	18.	33 34

	§§.	Seite.
Von der Messung der auf das Papier getragenen Winkel — und der Zeichnung der auf dem Felde gemessenenen Winkel : : : :	—	34—35
d) Von der Berechnung regulärer Polygone. Erläutert durch Beispiele reg. Festungen. — Berechnung des Halbm. einer Fest. mit 19 Bollw. aus der Polygonseite. — Berechnung der Seite und des Umfanges eines Eilfeckes, aus dem Halbm. : : :	—	36 38
Eine Höhe zu messen, wenn man auf der Horizontalfläche des Gegenstandes bis an diese Höhe unmittelbar hinkommen kann : : : : :	22.	39
Bestimmung einer solchen Höhe aus deren Schatten u. der Sonnenhöhe	22.	40
Eine Höhe aus einer horizontalen Stationslinie zu messen, welche mit dem Gegenstande in einerlei Ebene liegt, aber nicht bis an denselben fortgesetzt werden kann : : : :	23.	41 2
Einige vorläufige pr. Bemerkungen über die Höhenmessung : : :	—	43 44
Weitere Ausführung des 23sten §s, wo die Stationslinie auf allmählig steigendem oder fallendem Boden liegt	24.	44 45
Aufl. der Pothanotschen Aufg., welche früher von dem Holl. M. Snellius in Anwendung gebracht worden ist, theils durch Zeichnung, theils durch Rechnung	25.	46 47
Erhöhungswinkel des Visirschusses :	26.	47 48
e) Von der Aufl. eben. schiefw. Dreiecke		

	§§.	Seite.
Aus einer Seite und 2 Winkeln, die übrigen Stücke eines Dreieckes — den Flächeninhalt desselben zu berechnen	28—	50. 51
Die Entfernung gewisser Gegenstände aus den an der Standlinie gemessenen Winkeln zu bestimmen . .	29.	51. 52
Benutzung des im 29sten § bezeichten Verfahrens zur Aufnahme einer ganzen Gegend	29.	52
Bestimmung der Flußbreite, nach einer schiefen Richtung genommen; die senkrechte ergibt sich aus dieser und dem Sinus des daran liegenden Wink.	29.	52 53
Berechnung der übrigen Bestimmungsst. eines Dr. aus 2 Seiten und 1 W., welcher einen der geg. Seiten gegenüber liegt	30.	53
Bemerkungen über diese Aufg. und Beisp.	—	53—57
Aus 2 Seiten und dem eingeschlossenen W. eines Dreieckes a) die übrigen Stücke	31.	58—60
b) bloß die dritte Seite . .	32.	60 61
c) bloß einen der beiden übrigen W.	—	62
d) den Flächeninhalt zu berechnen	33.	62
Messung einer unzugänglichen Entfernung, wenn man aus einer Station nach beiden Endpunkten kommen kann	34.	63
Aus den 3 Seiten eines Dr. I) die 3 W. geometrisch, II) algebraisch und zwar mittelst Log., III) ohne Log.;	35.	63—70
IV) den Flächeninhalt zu berechnen	36.	70
Messung einer unzugänglichen Entfer-		

	§§.	Seite.
nung, zu deren Endpunkten man nicht kommen kann ꞏ ꞏ ꞏ ꞏ	37.	70–72

Zweite Abtheilung.
Von der Körperlehre.

I. Abschn. Von der Lage der Ebenen gegen einander und gegen gerade Linien	1–16.	73–88
II. Abschn. Von den geom. a) regulären Körpern ꞏ ꞏ ꞏ ꞏ	17–22.	89–93
b) Von den Prismen und Pyramiden	22–27.	93–98
Von der Berechnung der Oberfläche geometr. Körper ꞏ ꞏ ꞏ	28. 29.	98–101
c) Von dem körperlichen Inhalte der Prismen und Pyramiden ꞏ	30–35.	101–109
d) Von deren Berechnung ꞏ	36.	109–112
Von der Berechnung einer abgekürzten Pyramide aus der Höhe A und beiden Grundflächen B und b — durch	37.	112 113
Reduktion vereinfacht ꞏ ꞏ	—	113
Aus 2 gleichnahmigen Seitenlin. der Höhe A und der einen Grundfläche	—	33
Körperl. Inhalt schief abgeschnittener Prismen ꞏ ꞏ ꞏ ꞏ	38.	114–115
e) Vom Cylinder und Kegel, deren	39.	115–119
Vergleichung und Berechnung —	40.	121
vom hohlen — ausgeschnitt. Cylind.	41.	121
Berechnung der Kegelfläche ꞏ	44.	124
Ber. des körperl. Inh. ganzer, — abgekürzter Kegel ꞏ ꞏ ꞏ	45. 46.	125–128
f) Von den Kugelschnitten ꞏ	47–51.	128–133
g) Von der Kugel, ihren Aus- und Abschnitten ꞏ ꞏ ꞏ	52–	133–136
Von der Kugelfläche, dem körperl.		

	§§.	Seite.
Inhalte d. K. deren Vergleichung von den Kugelzonen =	52. 53.	134—136
Beisp. zur Berechnung des körp. Inh.	—	137
Verwandelung geom. Körper in einand.	55.	137 138
b) Von der Berechnung der Kugelhauf.	56.	139
Formel zur Berechnung viereckiger pyr. Haufen = = = = =	57.	139—141
Folgerung — — abgekürzt. v. H.	—	141
Formel zur Berechn. dreis. pyr. Hauf.	58.	141—144
Formel — — zeltförmig geschichteter Kugelhaufen = = =	59.	144—146
Zusammenstellung der Kugelh. =	—	146—148
Die Seite der Kugelhaufen aus der gegebenen Summe zu einer drei u. vierseit. Pyram. zu finden =	61 62.	148—150
Für zeltförmige Haufen = =	63.	150 151

Dritte Abtheilung.

Von der Theorie der Kegelschnitte.

I. Abschn. a) Einleitende Begriffe	1.	153—155
b) Gleichung für die gerade Linie	2—6.	155—161
c) Allg. Gl. für den Kreis =	7. 8.	161—165
Von den allg. Gl. der Kegelschnitte	9—11.	165—169
a) Von der Parabel = = =	12.	169
Von der Entwickelung der Haupteigenschaften d. Parab. durch Gl.	12—15.	169—176
Bestimmung des Abstandes jedes Punktes d. krumm. Linie vom Brennpunkte	16.	176—178
Verzeichnung der Parabel durch Punkte	18.	178
An jeden Punkte der Par. eine Tangente zu ziehen = = =	19.	179 180
Ausdruck für die Subtangente, Subnormale, Tangente und Normale der Parabel = = = =	20—22.	180—182

	§§.	Seite.
Gl. für die Parabel in Beziehung auf ihre Durchmesser	24.	184—187
Berechnung der Flächenräume par. Abschnitte	27.	188—190
Berechnung der Paraboloide	28.	191—193
II. Abschn. Von der Ellipse	29—55.	194—227
Allg. Gleich. der Ellipse	31.	194—196
Gleich. der Ellipse aus der gr. Axe und dem Parameter	33.	198
— — wenn die Abscissen vom Mittelpunkt gerechnet werden	34.	198 199
Die Summe der Entfernungen eines jeden Punktes in der Ellipse von den Brennpunkten ist der gr. Axe gleich	38.	201 202
Verzeichnung der Ellipse	39.	203
Gleich. der Ellipse die Abscissen auf der kl. Axe	40.	204 205
Polargl. der Ellipse	41. 42.	205 206
An jeden Punkt der Ell. eine Tangente zu ziehen	43.	206—208
Ausdrücke für die Subnormale, Normale, Subtangente und Tangente der Ellipse	44.	208—212
Die Summe der Quadrate der beiden Axen in der Ellipse ist der Summe der Quadrate zweier zugeordneten Durchmesser gleich	46.	213—216
Gleich. der Ellip. aus d. Durchm. ꝛc.	48. 49.	216—219
a) Vergleich. der Param. u. Ellipse	51.	220—223
b) Von der Aehnlichkeiten der Parabeln und Ellipsen	52. 53.	224 225
c) Von dem Flächeninhalte der Ell.	54.	225 226
Berechnung der Ellipsoide	55.	227 228

	§§.	Seite.
III. Abschn. Von der Hyperbel	56.	228
a) Von d. Gleichungen d. Hyperb. nach ähnlichen Bestimmungen wie für die Ellipse	56.	228—234
Die Differenz der Entfernungen eines Punktes der Hyp. von den Brennp. ist der ersten Axe gleich	60.	234. 235
Verzeichnung der Hyperbel aus den gegebenen Axen	61.	235. 236
Polargleichung der Hyperbel	62.	236. 237
An jeden Punkt der Hyp. eine Tangente zu ziehen	63.	237. 238
Ausdrücke für die Subtangente, Subnormale, Normale und Tangente zu finden	64. 65.	238—241
b) Von den Eigenschaften der Hyperbel, in Absicht ihrer Asymptoten	66—75.	241—250
Von der Potenz der Hyperb.	68.	244
Durch einen gegebenen, zwischen den Asymptoten liegenden Punkt, eine Hyperbel zu beschreiben	72.	247
Von den Durchmessern rc. der Hyp.	74.	249
c) Von der gleichseitigen Hyp.	76.	251
Lehrs. — Allg. Theorie d. Logarith. zur Ergänzung des X. Absch. der Alg.	78.	252
Entwickelung d. Ausdruckes Log (1+x) in einer Reihe	78.	252—256
Log. Modulus	78.	257
Von den natürl. od. hyperb. Log.	79.	257
Entwickel. einer zur Berechn. bequemern Reihe aus der gefundenen	81.	258—259
Reihen, welche zur Berechnung der auf einand. folg. Zahlen eingericht. sind	81.	260
Verwandl. d. Log. in einander	82.	261
Bem. für die Berechn. d. Zahlen durch Log. mittelst der Proportionaltheile	83.	262
Berechn. d. Flächenräume hyp. Abschn.	84.	263
Von der Hyperboloide		

Bayerische
Staatsbibliothek
München

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Zimmermann, Christian Gottlieb,

Theorie der Kegelschnitte Mit 1 Kupfertafel

Berlin 1818

39.4103
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10701747-2